Krigagem Universal

Rachid Muleia

A krigagem ordinária (assim como a krigagem simples) assume que a média do processo é constante, isto é,

$$Z(s) = \mu + \delta(s)$$

onde $\delta(\cdot)$ tem média zero e variograma $2\gamma(\cdot)$, em outras palavras pode-se dizer que a krigagem estacionária assume que o processo é estacionário de segunda ordem. Porém a hipótese de estacionáridade é muito simplista e pouco realística. A média pode ser função das coordenadas X, Y, expressa na forma linear, quadrática ou um polinómio com um grau maior. Por exemplo o valor de Z em uma localização s pode ser expresso da seguinte forma:

$$Z(s_i) = \beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 Y_i + \delta(s_i), \quad \text{linear}$$

Ou

$$Z(s_i) = \beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 Y_i + \beta_3 X_i^2 + \beta_4 X_i Y_i + \beta_5 Y_i^2 + \delta(s_i), \quad \text{quadrática}$$

Se este for o caso, então dizemos que existe uma tendência do tipo polinomial. No cáculo dos pesos (λ_i) precisas de levar em conta a tendência presente dos dados. O valor previsto $Z(s_0)$ na posição 0 será novamente uma combinação linear dos valores observados $Z(s_i)$, $i = 1, 2, \cdots, n$:

$$Z^*(s_0) = \lambda_1 Z(s_1) + \lambda_2 Z(s_2) + \cdots + \lambda_n Z(s_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Z(s_i)$$

onde

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$$

Agora suponha que existe uma tendência linear. Então, $Z^*(s_0)$ pode ser expresso da seguinte forma:

$$Z^*(s_0) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Z(s_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \beta_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \beta_1 X_i + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \beta_2 Y_i + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta(s_i)$$

Ou

$$Z^*(s_0) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Z(s_i) = \beta_0 + \beta_1 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i + \beta_2 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Y_i + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta(s_i) \tag{1}$$

Observe que $Z(s_0)$ pode ser expresso em termos da tendência linear :

$$Z(s_0) = \beta_0 + \beta_1 X_0 + \beta_2 Y_0 + \delta(s_0)$$

Compare (1) e (2). A fim de garantir que temos um estimador centrado (não enviesado), vamos precisar das seguintes condições:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i = X_0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i Y_i = Y_0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$$

Como na krigagem ordinária, para encontrar os pesos quando a tendência está presente, precisamos minimizar o erro quadrático médio (MSE)

$$\min\Big(Z(s_0) - \textstyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i Z(s_i)\Big)^2$$

sujeito às restrições acima.

O Sistema de krigagem com tendência linear como função das coordenadas x, y

$$\begin{pmatrix} \gamma(s_1,s_1) & \gamma(s_1,s_2) & \gamma(s_1,s_3) & \cdots & \gamma(s_1,s_n) & x_1 & y_1 & 1 \\ \gamma(s_2,s_1) & \gamma(s_2,s_2) & \gamma(s_2,s_3) & \cdots & \gamma(s_2,s_n) & x_2 & y_2 & 1 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma(s_n,s_1) & \gamma(s_n,s_2) & \gamma(s_n,s_3) & \cdots & \gamma(s_n,s_n) & x_n & y_n & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & \cdots & x_n & 0 & 0 & 0 \\ y_1 & y_2 & \cdots & \cdots & y_n & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \lambda_n \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(s_0,s_1) \\ \gamma(s_0,s_1) \\ \vdots \\ \vdots \\ \gamma(s_0,s_n) \\ x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Considere um semivariograma exponencial com os seguintes parâmetros $c_0 = 0$, $c_1 = 10$, $a = 3.33$, $\gamma(h) = 10(1 - \exp(-\frac{h}{3.33})$

	x	y	$z(s)$
s_1	61	139	477
s_2	63	140	696
s_3	64	129	227
s_4	68	128	646
s_5	71	140	606
s_6	73	141	791
s_7	75	128	783
s_0	65	137	**???**

Primeiro calculamos a matriz de distância:

$$\text{distâncias} = \begin{pmatrix} & s0 & s1 & s2 & s3 & s4 & s5 & s6 & s7 \\ s0 & 0.00 & 4.47 & 3.61 & 8.06 & 9.49 & 6.71 & 8.94 & 13.45 \\ s1 & 4.47 & 0.00 & 2.24 & 10.44 & 13.04 & 10.05 & 12.17 & 17.8 \\ s2 & 3.61 & 2.24 & 0.00 & 11.05 & 13 & 8.00 & 10.05 & 16.97 \\ s3 & 8.06 & 10.44 & 11.05 & 0.00 & 4.12 & 13.04 & 15 & 11.05 \\ s4 & 9.49 & 13.04 & 13.00 & 4.12 & 0.00 & 12.37 & 13.93 & 7.00 \\ s5 & 6.71 & 10.05 & 8.00 & 13.04 & 12.37 & 0 & 2.24 & 12.65 \\ s6 & 8.94 & 12.17 & 10.05 & 15.00 & 13.93 & 2.24 & 0.00 & 13.15 \\ s7 & 13.45 & 17.8 & 16.9 & 11.05 & 7.00 & 2.65 & 13.15 & 0.00 \end{pmatrix}$$

Usando as equações de krigagem universal (supondo que haja uma tendência linear em nossos dados), os pesos, a estimativa e a variância são calculados da seguinte maneira:

$$\Lambda = \Gamma^{-1}\gamma = \begin{pmatrix} 0.00 & 4.893 & 9.564 & 9.800 & 9.510 & 9.740 & 9.952 & 61 & 139 & 1 \\ 4.893 & 0.00 & 9.637 & 9.798 & 9.093 & 9.51 & 9.938 & 63 & 140 & 1 \\ 9.564 & 9.637 & 0.00 & 7.095 & 9.8 & 9.889 & 9.637 & 64 & 129 & 1 \\ 9.8 & 9.798 & 7.095 & 0.00 & 9.755 & 9.847 & 8.775 & 68 & 128 & 1 \\ 9.51 & 9.093 & 9.8 & 9.755 & 0.00 & 4.893 & 9.775 & 71 & 140 & 1 \\ 9.74 & 9.51 & 9.889 & 9.847 & 4.893 & 0.00 & 9.806 & 73 & 141 & 1 \\ 9.952 & 9.938 & 9.637 & 8.775 & 9.775 & 9.806 & 0.00 & 75 & 128 & 1 \\ 61 & 63 & 64 & 68 & 71 & 73 & 75 & 0 & 0 & 0 \\ 139 & 140 & 129 & 128 & 140 & 141 & 128 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 7.384 \\ 6.614 \\ 9.109 \\ 9.420 \\ 8.664 \\ 9.316 \\ 9.823 \\ 65 \\ 137 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Então

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \\ \lambda_7 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_0 \end{pmatrix} == \begin{pmatrix} 0.220 \\ 0.342 \\ 0.147 \\ 0.073 \\ 0.151 \\ 0.040 \\ 0.027 \\ -0.066 \\ 0.023 \\ 2.301 \end{pmatrix}$$

A estimativa é igual a :

$z^*(s_0) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i z(s_i) = 0.220(477) + \cdots + 0.027(783) = 567.54$