Ficha de Exercícios 2

Rachid Muleia

1. Seja $Z(x)$ uma função aleatória estacionária. Mostre que a covariância definida por: $C(h) = E\big\{[Z(x+h) - m][Z(x) - m]\big\}$ tem as seguintes propriedades:

   (i) $C(0) \geqslant 0$

   (ii) $C(h) = C(-h)$

   (iii) $|C(h)| \leqslant C(0)$

2. Seja $Z(x)$ uma função aleatória estacionária. Mostre que a o semivariograma definido por: $\gamma(h) = \frac{1}{2}E\big[Z(x+h) - Z(x)\big]$ tem as seguintes propriedades:

   (i) $\gamma(0) = 0$

   (ii) $\gamma(-h) = \gamma(h)$

3. Seja $Z^*(x)$ uma funcao aleatória estacionária.

$$Z^*(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Z(x_i)$$

   onde λ_i é um escalar. Mostre que

$$\mathrm{Var}\big[Z^*(x)\big] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i\lambda_j \mathrm{Cov}\big[Z(x_i), Z(x_j)\big]$$

4. Considere o semivariograma esférico

$$\gamma(\boldsymbol{h}) = \begin{cases} C(\boldsymbol{0})\left(1.5\dfrac{|\boldsymbol{h}|}{a} - 0.5\Big(\dfrac{|\boldsymbol{h}|}{a}\Big)^3\right) & \text{se} \quad |\boldsymbol{h}| < a \\ C(\boldsymbol{0}) & \text{se} \quad |\boldsymbol{h}| \geqslant a \end{cases}$$

   Esboce a curva do semivariograma para uma soleira $c = 2$ e uma amplitude $a = 100m$

5. Esboce a curva do semivariograma é a soma de dois semivariogramas esféricos,onde o primeiro semivariograma tem uma soleira igual a 1 com uma amplitude igual 50 m, e o segundo semivariograma tem uma soleira igual a 1 e uma amplitude igual a 100 m. (aplique o conceito de semivariogramas aninhados).

6. Calcule a tangente do semivariograma na origem e mostre a tangente na origem intersecta a recta $Y = c$ para $h = (2/3)a$. Interprete o valor da tangente na origem.

7. Mostre que o semivariograma esférico na origem tem o mesmo comportamento do semivariograma linear com a seguinte equação: $\gamma(h) = \frac{3c}{a}|h|$

8. Trace o gráfico do semivariograma exponencial para uma soleira igual a 2 e amplitude igual 30 m. Faça uma comparação com os semivariogramas das questões 4 e 5.

9. Calcule a amplitude prática do modelo (semivariograma exponencial da questão 8), isto é, o valor de h para qual o semivariograma atinge 95% do valor da sua soleira.

10. Considere o semivariograma Gaussiano : $\gamma(h) = c\big[1 - \exp(-\frac{h^2}{a})\big]$. Faça a representação gráfica deste semivariograma, quando a soleira for igual a 2 e a amplitude igual a 50 m. O que se pode dizer deste semivariograma em comparação com os semivariogramas traçados nas questões 4 e 8?

11. Mostre que o comportamento so semivariograma Gaussiano é parabólico na origem (palpite: Série de Taylor)

12. Considere a as seguintes malhas regulares numa única direcção:

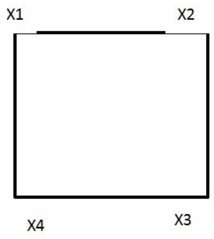
```
              1     3      5       7       9       8       6       4       2
Caso I        I--------I--------I--------I------- I--------I-------I--------I--------I
              5       1       9       2       3       7       8       4       6
Caso II       I--------I--------I--------I------- I--------I-------I--------I--------I
```

A figura acima representa o valor de $Z(x)$ em cada ponto. Calcule o semivariograma experimental para os dois casos.

13. A malha abaixo representa o teor em percentagem. Observa-se que dois valores estão omissos. Calcule o semivariograma experimental.

```
2.4      3.0        -        1.8      1.5      3.0        -        2.5
I-------- I-------- I-------- I-------- I-------- I-------- I-------- I
```

14. Seja $Z(x)$ uma funļão aletória estacionária, e seja Z^* a média ponderada dos valores nos quatro cantos de um quadrado de $100m \times 100m$:



$$Z^* = 0.5Z(x_1) + 0.2Z(x_2) + 0.2Z(x_3) + 0.1Z(x_4)$$

a) Avalie a variância de Z^*, sabendo que a covariância espacial de $Z(x)$ é dado pela seguinte função exponencial:

$$C(\boldsymbol{h}) = 2.5\exp(-\boldsymbol{h}/200)$$

15. Suponhamos que temos um jazigo de ferro do qual foi feita uma amostragem. A malha considerada para as sondagens é regular, com distâncias iguais entre as amostras. Foram tirados os teores, não considerando a profundidade, para fazer uma estimação bidimensional sobre a planta. As amostragens foram feitas a 100 metros de distância umas das outras na direcção "Este-Oeste" e "Norte-Sul"(veja a Figura 1 abaixo).

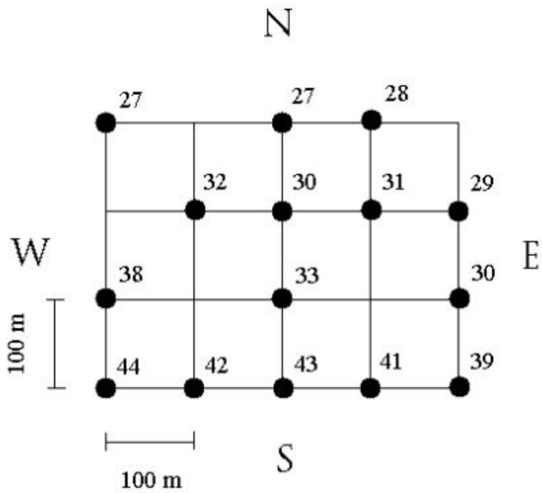


Figura 1: Distância entre sondagens e teor de ferro em cada uma delas.

a) Calcule o variograma empírico na direcção "Este-Oeste" para a distância de 100,200 e 300 metros.

b) Calcule o variograma na direcção "Norte-Sul" para a distância de 100, 200 e 300 metros.

(a) Determine a soleira do semivariograma, assumindo que não existe erros de medição na amostragem.

c) Calcule a covariaância do precesso para uma distância igual a zero metros.

d) Calcule a correlação entre as observações para uma distância de 100,200 e 300 metros.

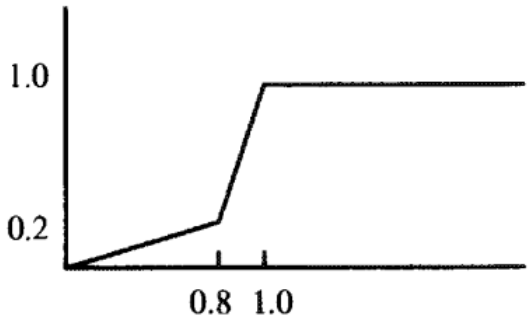
e) Trace o gráfico do semivariograma empírico nas duas direcção. Este processo é isotrópico ou anisotrópico?

16. Suponha que dois pontos x_1 e x_2 distam 100 metros. Calcule a variance da combinação linear $Z^* = Z(x_1) + Z(x_2)$ onde $Z(x)$ é uma variável com aleatória estacionária descrita por um semiviariograma esférico com amplitude de 250 metros e soleira de 3.

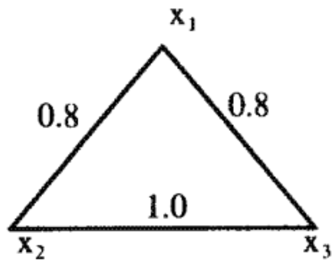
(i) Qual seria o valor da variância se a amplitude fosse 25 metros?

(iii) Qual seria o valor da variância se o modelo de semivariograma fosse um modelo de efeito pepita puro? Porque o valor é mesmo para a amplitude de 25 metros?

17. Para destacar a importância do uso de modelos de semivariogramas admissíveis, eis um caso onde se uso um modelo não-padrão de semivariograma. O modelo, bem como layout dos dados, são mostrados na figura abaixo. Os três pontos formam um triângulo isósceles com medidas, 0.8, 0.8 e 1.0. Veja que a soma dos pesos é igual a zero. Calcule a variância da seguinte combinação linear: $Z^* = Z(x_1) - 0.5Z(x_2) - 0.5Z(x_3)$. Comente em torno do valor obtido para a variância da combinação linear.



Semivariograma não-padrão



Layout dos pontos