Estatística Aplicada a Recursos Hídricos

Docente: Rachid Muleia

rachid.muleia@uem.mz

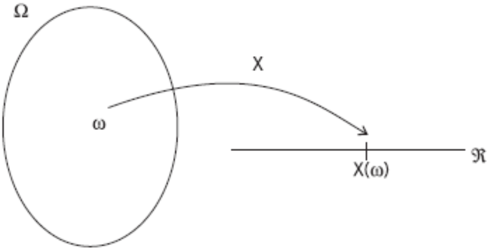
Mestrado em Gestão de Recursos Hídricos - DGEO/UEM

Tema: Variáveis Aleatórias

Ano lectivo: 2023

Conceitos e notações de variáveis aleatórias

Definição: Uma variável aleatória (v.a.) é uma função que associa um número real a cada resultado do espaço amostral de um experimento aleatório.



Uma variável aleatória, seu domínio e seu contradomínio

- a qualquer elemento ω de Ω corresponde um único valor $x = X(\omega)$.
- A v.a. denota-se em geral por uma letra maiúscula $X, Y \ldots$.
- Na prática, estamos interessado no conjunto de valores que a v.a. pode assumir e na probabilidade de ocorrência de cada valor.

Conceitos e notações de variáveis aleatórias

Exemplo: Considere um experimento em que cada um de três veículos que trafegam em uma determinada estrada siga pela saída à esquerda (E) ou à direita (D) no final da rampa de saída.

$\Omega = \{EEE, DEE, EDE, EED, EDD, DED, DDE, DDD\}$

- Seja X o número de veículos que sigam à direita;

Conceitos e notações de variáveis aleatórias

Exemplo: Considere um experimento em que cada um de três veículos que trafegam em uma determinada estrada siga pela saída à esquerda (E) ou à direita (D) no final da rampa de saída.

$\Omega = \{EEE, DEE, EDE, EED, EDD, DED, DDE, DDD\}$

- Seja X o número de veículos que sigam à direita;
- X é uma v.a. que pode assumir um dos valores $0, 1, 2$, e 3 com probabilidades

Conceitos e notações de variáveis aleatórias

Exemplo: Considere um experimento em que cada um de três veículos que trafegam em uma determinada estrada siga pela saída à esquerda (E) ou à direita (D) no final da rampa de saída.

$\Omega = \{EEE, DEE, EDE, EED, EDD, DED, DDE, DDD\}$

- Seja X o número de veículos que sigam à direita;
- X é uma v.a. que pode assumir um dos valores $0, 1, 2$, e 3 com probabilidades

$$
\begin{aligned}
P(X = 0) &= P(\{DDD\}) = 1/8 \\
P(X = 1) &= P(\{DEE, EDE, EED\}) = 3/8 \\
P(X = 2) &= P(\{EDD, DED, DDE\}) = 3/8 \\
P(X = 3) &= P(\{DDD\}) = 1/8
\end{aligned}
$$

- A distribuição de probabilidade de X fica:

X	0	1	2	3
P(X)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Conceitos e notações de variáveis aleatórias

Exemplo: Considere um experimento em que cada um de três veículos que trafegam em uma determinada estrada siga pela saída à esquerda (E) ou à direita (D) no final da rampa de saída.

$\Omega = \{EEE, DEE, EDE, EED, EDD, DED, DDE, DDD\}$

- Seja X o número de veículos que sigam à direita;
- X é uma v.a. que pode assumir um dos valores $0, 1, 2,$ e 3 com probabilidades

$$
\begin{aligned}
P(X=0) &= P(\{DDD\}) = 1/8 \\
P(X=1) &= P(\{DEE, EDE, EED\}) = 3/8 \\
P(X=2) &= P(\{EDD, DED, DDE\}) = 3/8 \\
P(X=3) &= P(\{DDD\}) = 1/8
\end{aligned}
$$

- A distribuição de probabilidade de X fica:

X	0	1	2	3
P(X)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

- As variáveis aleatórias são classificadas em discretas e contínuas

Variáveis aleatórias discretas

Definições:

- Uma variável aleatória X é discreta se ela pode assumir valores em um conjunto finito ou infinito, porém enumerável.

- Função de probabilidade de uma v.a. discreta X
  É uma função que associa a cada valor assumido pela v.a. X a probabilidade do evento correspondente, ou seja, $x_i \to p(x_i) = P(X = x_i),\ i = 1, 2, \ldots, n$ de tal forma que:
  - i) $p(x_i) \geq 0,\ \forall i,\ i = 1, 2, \ldots, n$
  - ii) $\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1$

- Ao conjunto $\{(x_i, p(x_i)), i = 1, 2, \ldots, n\}$ chama-se distribuição de probabilidade ou função de massa de probabilidade (fmp) de X;

- Note que X é o nome da v.a., enquanto que x_i (minúsculo) é um certo que X pode assumir.

Função de distribuição de uma v.a. discreta

Definição: Se X é uma v.a. discreta cujos valores possíveis são $x_1, x_2, \ldots, x_n$, onde $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, então a função de distribuição ou função acumulada de probabilidade de X, denotada por $F(x)$, é definida como

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i).$$

Indica a probabilidade de o valor observado de X ser no máximo x.
Para uma v.a. discreta X, F(x) satisfaz as seguintes propriedades:

1) $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i)$.
2) $0 \leq F(x) \leq 1$
3) Se $x \leq y$, então $F(x) \leq F(y)$
4) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$;

Função de distribuição de uma v.a. discreta

Exemplo: Num determinado bairro, 25% das famílias não têm filhos, 50% têm um filho e 25% das famílias têm dois filhos.

- Seja X o nº de filhos de uma família sorteada ao acaso nesse bairro.
- X é uma v.a. que pode assumir um dos valores $0, 1$ e 2.
- Função de probabilidade de X:

X	0	1	2
$p(x_i) = P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

- Determinamos $F(x)$ de cada valor no conjunto $\{0, 1, 2\}$:

Função de distribuição de uma v.a. discreta

Exemplo: Num determinado bairro, 25% das famílias não têm filhos, 50% têm um filho e 25% das famílias têm dois filhos.

- Seja X o nº de filhos de uma família sorteada ao acaso nesse bairro.
- X é uma v.a. que pode assumir um dos valores $0, 1$ e 2.
- Função de probabilidade de X:

X	0	1	2
$p(x_i) = P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

- Determinamos $F(x)$ de cada valor no conjunto $\{0, 1, 2\}$:
  $F(0) = P(X \leq 0) = P(X = 0) = p(0) = 1/4$;
  $F(1) = P(X \leq 1) = p(0) + p(1) = 3/4$;
  $F(2) = P(X \leq 2) = p(0) + p(1) + p(2) = 1$
- Para qualquer outro valor de x, $F(x)$ será igual ao valor de F mais próximo possível de X à esquerda de x
- Exemplo: $F(0,7) = P(X \leq 0,7) = P(X \leq 0) = 1/4$; $F(2,999) = F(2) = 3/4$

Função de distribuição de uma v.a. discreta

Exemplo (Cont.):

- Portanto, a função de distribuição de X é:

Função de distribuição de uma v.a. discreta

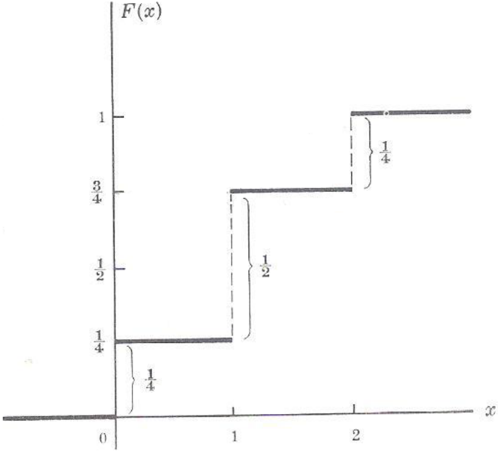
Exemplo (Cont.):

- Portanto, a função de distribuição de X é:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{4} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{3}{4} & 1 \leq x < 2 \\ 1 & 2 \leq x \end{cases}$$

Função de distribuição de uma v.a. discreta

- Exemplo (Cont.): Gráfico da função de distribuição de X



- $F(x)$ é uma função escada ou função degrau, isto é, F dá um passo (salto) de tamanho $p(x_i)$ em x_i, sempre que $p(x_i) > 0$

Função de distribuição de uma v.a. discreta

Exemplo 1: Considere a seguinte função:

$$P(X = j) = (8/7)(1/2)^j, \; j = 1, 2, 3.$$

i) Verifique que a função dada é uma função de probabilidade de X.
ii) Calcule $P(X \leq 1)$, $P(X > 1)$, $P(2 < X < 6)$ e $P(X \leq 1 \text{ ou } X > 1)$
iii) Determine a função de distribuição de X
iv) Calcule $F(1, 99)$ e $F(2, 5)$

Função de distribuição de uma v.a. discreta

Exemplo 1: Considere a seguinte função:

$$P(X = j) = (8/7)(1/2)^j,\ j = 1, 2, 3.$$

i) Verifique que a função dada é uma função de probabilidade de X.
ii) Calcule $P(X \leq 1)$, $P(X > 1)$, $P(2 < X < 6)$ e $P(X \leq 1 \text{ ou } X > 1)$
iii) Determine a função de distribuição de X
iv) Calcule $F(1, 99)$ e $F(2, 5)$

Resolução:

Função de distribuição de uma v.a. discreta

Exemplo 1: Considere a seguinte função:

$$P(X = j) = (8/7)(1/2)^j, \; j = 1, 2, 3.$$

i) Verifique que a função dada é uma função de probabilidade de X.

ii) Calcule $P(X \leq 1)$, $P(X > 1)$, $P(2 < X < 6)$ e $P(X \leq 1 \text{ ou } X > 1)$

iii) Determine a função de distribuição de X

iv) Calcule $F(1,99)$ e $F(2,5)$

Resolução:

X	1	2	3
P(X)	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$

i) $\sum_{j=1}^{3} P(X = j) = 1$. Portanto, $p(x)$ é uma f.p. de X.

ii) $P(X \leq 1) = P(X = 1) = \frac{4}{7}$; $P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = \frac{3}{7}$;
$P(2 < X < 6) = P(X = 3) = \frac{1}{7}$;
$P(X \leq 1 \text{ ou } X > 1) = P(X \leq 1) + P(X > 1) = \frac{4}{7} + \frac{3}{7} = 1$

Resolução (cont.):

X	1	2	3
P(X)	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$

iii) Função de distribuição

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{4}{7} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{6}{7} & 2 \leq x < 3 \\ 1 & 3 \leq x \end{cases} .$$

iv) $F(1,99) = P(X \leq 1,99) = P(X \leq 1) = F(1) = \frac{4}{7}$ e

$F(2,5) = P(X \leq 2,5) = P(X \leq 2) = F(2) = \frac{6}{7}$

Obtenção da fmp a partir da função de distribuição

Proposição: Para quaisquer dois números a e b com $a \leq b$,

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a^-)$$

onde "a^-" é o maior valor possível de X estritamente menor que a.

- Se os valores possíveis de X forem inteiros e, se a e b forem inteiros, então

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a-1)$$

- Considerando $a = b$, resulta que $P(X = a) = F(a) - F(a-1)$
- Subtrai-se $F(a^-)$ ao vez de $F(a)$ porque queremos incluir $P(X = a)$

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) + P(X = a)$$

- Note que $F(b) - F(a)$ fornece $P(a < X \leq b)$

Exemplo 2: Considere uma v.a. X com os $F(0) = 0,58$, $F(1) = 0,72$, $F(2) = 0,76$, $F(3) = 0,81$, $F(4) = 0,88$, $F(5) = 0,94$, ...

$P(2 \leq X \leq 5) =$

Obtenção da fmp a partir da função de distribuição

Proposição: Para quaisquer dois números a e b com $a \leq b$,

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a^-)$$

onde "a^-" é o maior valor possível de X estritamente menor que a.

- Se os valores possíveis de X forem inteiros e, se a e b forem inteiros, então

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a-1)$$

- Considerando $a = b$, resulta que $P(X = a) = F(a) - F(a-1)$

- Subtrai-se $F(a^-)$ ao vez de $F(a)$ porque queremos incluir $P(X = a)$

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) + P(X = a)$$

- Note que $F(b) - F(a)$ fornece $P(a < X \leq b)$

Exemplo 2: Considere uma v.a. X com os $F(0) = 0,58$, $F(1) = 0,72$, $F(2) = 0,76$, $F(3) = 0,81$, $F(4) = 0,88$, $F(5) = 0,94$, ...

$P(2 \leq X \leq 5) = F(5) - F(1) = 0,22$;
$P(X = 3) =$

Obtenção da fmp a partir da função de distribuição

Proposição: Para quaisquer dois números a e b com $a \leq b$,

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a^-)$$

onde "a^-" é o maior valor possível de X estritamente menor que a.

- Se os valores possíveis de X forem inteiros e, se a e b forem inteiros, então

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a-1)$$

- Considerando $a = b$, resulta que $P(X = a) = F(a) - F(a-1)$

- Subtrai-se $F(a^-)$ ao vez de $F(a)$ porque queremos incluir $P(X = a)$

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) + P(X = a)$$

- Note que $F(b) - F(a)$ fornece $P(a < X \leq b)$

Exemplo 2: Considere uma v.a. X com os $F(0) = 0,58$, $F(1) = 0,72$, $F(2) = 0,76$, $F(3) = 0,81$, $F(4) = 0,88$, $F(5) = 0,94$, ...

$P(2 \leq X \leq 5) = F(5) - F(1) = 0,22$;
$P(X = 3) = F(3) - F(2) = 0,05$

Obtenção da fmp a partir da função de distribuição

Exemplo 3: Uma variável X tem a seguinte função de distribuição

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 10 \\ 0,2 & 10 \leq x < 12 \\ 0,5 & 12 \leq x < 13 \\ 0,9 & 13 \leq x < 25 \\ 1 & 25 \leq x \end{cases}.$$

i) $P(X \leq 12) =$

Obtenção da fmp a partir da função de distribuição

Exemplo 3: Uma variável X tem a seguinte função de distribuição

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 10 \\ 0,2 & 10 \leq x < 12 \\ 0,5 & 12 \leq x < 13 \\ 0,9 & 13 \leq x < 25 \\ 1 & 25 \leq x \end{cases}.$$

i) $P(X \leq 12) = F(12) = 0,5$

ii) $P(X < 12) =$

Exemplo 3: Uma variável X tem a seguinte função de distribuição

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 10 \\ 0,2 & 10 \leq x < 12 \\ 0,5 & 12 \leq x < 13 \\ 0,9 & 13 \leq x < 25 \\ 1 & 25 \leq x \end{cases}.$$

i) $P(X \leq 12) = F(12) = 0,5$

ii) $P(X < 12) = P(X \leq 10) = F(10) = 0,2$

iii) $P(12 \leq x \leq 20) =$

Obtenção da fmp a partir da função de distribuição

Exemplo 3: Uma variável X tem a seguinte função de distribuição

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 10 \\ 0,2 & 10 \leq x < 12 \\ 0,5 & 12 \leq x < 13 \\ 0,9 & 13 \leq x < 25 \\ 1 & 25 \leq x \end{cases} .$$

i) $P(X \leq 12) = F(12) = 0,5$

ii) $P(X < 12) = P(X \leq 10) = F(10) = 0,2$

iii) $P(12 \leq x \leq 20) = F(20) - F(11) = 0,9 - 0,2 = 0,7$

iv) $P(X > 18) =$

Obtenção da fmp a partir da função de distribuição

Exemplo 3: Uma variável X tem a seguinte função de distribuição

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 10 \\ 0,2 & 10 \leq x < 12 \\ 0,5 & 12 \leq x < 13 \\ 0,9 & 13 \leq x < 25 \\ 1 & 25 \leq x \end{cases}.$$

i) $P(X \leq 12) = F(12) = 0,5$

ii) $P(X < 12) = P(X \leq 10) = F(10) = 0,2$

iii) $P(12 \leq x \leq 20) = F(20) - F(11) = 0,9 - 0,2 = 0,7$

iv) $P(X > 18) = 1 - P(X \leq 18) = 1 - F(18) = 1 - 0,9 = 0,1$

Média e Variância de uma v.a discreta X

- A média e variância são frequentemente usados para resumir a distribuição de probabilidade de uma v.a.

- Definição: Seja X uma v.a. discreta que assume os valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ com probabilidades $p(x_1), p(x_2), \ldots, p(x_n)$, respectivamente. A média, valor esperado ou esperança matemática ou valor esperado de X, denotado por $E(X)$ ou μ_x, é

$$E(X) = \mu_x = \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i)$$

- A Esperança matemática é um número real.

- Exemplo: Seja X o nº de filhos de uma família sorteada ao acaso num bairro com a seguinte distribuição de probabilidade:

X	0	1	2	3
$P(X)$	$0,3$	$0,4$	$0,2$	$0,1$

Média e Variância de uma v.a discreta X

- A média e variância são frequentemente usados para resumir a distribuição de probabilidade de uma v.a.

- Definição: Seja X uma v.a. discreta que assume os valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ com probabilidades $p(x_1), p(x_2), \ldots, p(x_n)$, respectivamente. A média, valor esperado ou esperança matemática ou valor esperado de X, denotado por $E(X)$ ou μ_x, é

$$E(X) = \mu_x = \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i)$$

- A Esperança matemática é um número real.

- Exemplo: Seja X o nº de filhos de uma família sorteada ao acaso num bairro com a seguinte distribuição de probabilidade:

X	0	1	2	3
$P(X)$	0,3	0,4	0,2	0,1

O valor esperado de X (nº médio de filhos por família) é

$$E(X) = 0 \times 0,3 + 1 \times 0,4 + 2 \times 0,2 + 3 \times 0,1 = 1,1.$$

Propriedades da esperança matemática

i) $E(k) = k,\ K$: constante.

ii) $E(k \cdot X) = k \cdot E(X)$

iii) $E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$

iv) $E\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i\right\} = \sum_{i=1}^{n}\{E(X_i)\}$

v) $E(aX \pm b) = aE(X) \pm b$, a e b constantes.

vi) $E(X - \mu_x) = 0$

Variância de uma v.a. discreta

- A variância fornece o grau de dispersão (variabilidade) na distribuição de probabilidade de X em torno da média.

- Definição: Seja X uma v.a. discreta que assume os valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ com probabilidades $p(x_1), p(x_2), \ldots, p(x_n)$, respectivamente. A variância de X, denotado por $Var(X)$ ou σ_x^2, ou apenas σ^2, é

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 p(x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p(x_i) - \{E(X)\}^2 \qquad = \boxed{E(X^2) - \{E(X)\}^2}
\end{aligned}
$$

- O desvio padrão da variável X é $\sigma_x = \sqrt{Var(x)}$

- O Coeficiente de variação de X é $CV(X) = \frac{\sigma_x}{E(X)},\ E(X) \neq 0$

Variância de uma v.a. discreta

- Exemplo: Considere novamente o nº de filhos de uma família

X	$P(X)$	$X \cdot P(X)$	$X^2 \cdot P(X)$
0	0,3	0	0
1	0,4	0,4	0,4
2	0,2	0,4	0,8
3	0,1	0,3	0,9
	1	$E(X) = 1,1$	$E(X^2) = 2,1$

Variância de uma v.a. discreta

- Exemplo: Considere novamente o nº de filhos de uma família

X	$P(X)$	$X \cdot P(X)$	$X^2 \cdot P(X)$
0	0,3	0	0
1	0,4	0,4	0,4
2	0,2	0,4	0,8
3	0,1	0,3	0,9
	1	$E(X) = 1,1$	$E(X^2) = 2,1$

- $Var(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = 2,1 - 1,1^2 = 0,89$
- $\sigma_x = \sqrt{0,89} = 0,943$ filhos (desvio médio em relação a média)
- $CV(X) = \frac{0,943}{1,1} = 0,857$

Propriedades da variância

i) $Var(k) = 0, \; K$: constante.

ii) $Var(k \cdot X) = k^2 \cdot Var(X)$.

iii) $Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y) \pm 2cov(X, Y)$, $cov(X, Y)$ é a covariância entre X e Y.

Definição: Covariância entre X e Y,

$$cov(X, Y) = E\{[X - E(X)].[Y - E(Y)]\},$$

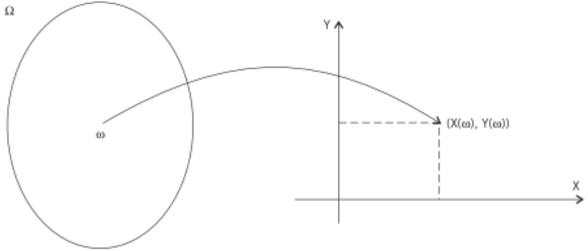
mede o grau de dependência entre as variáveis X e Y.

iv) $Var\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i\right\} = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + 2\sum_{i<j}^{n} cov(X_i, X_j)$

v) $Var(aX \pm b) = a^2 Var(X)$, a e b constantes.

Distribuição conjunta de duas v.a.'s

- Muitas vezes há interesse em estudar mais de um resultado de um experimento aleatório;
- Para duas v.a.'s X e Y definidas em um mesmo espaço amostral, obtém-se a v.a. bidimensional (X, Y)
- Se (X, Y) é uma variável aleatória bidimensional, então



Uma v.a. bidimensional, seu domínio e seu contradomínio

- cada elemento ω do espaço amostral Ω corresponde um único ponto de coordenadas $(X(\omega), Y(\omega))$

Função de massa de prob. conjunta de duas v.a.'s

Definição: Sejam $X = (x_1, x_2, x_3 \ldots, x_m)$ e $Y = (y_1, y_2, y_3 \ldots, y_n)$ duas v.a.'s discretas definidas no espaço amostral Ω de um experimento. Diz-se que a função $p(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j)$ define a função (de massa) de probabilidade conjunta da v.a. bidimensional (X,Y) se:

i) $p(x_i, y_j) \geq 0$ para todo par (i, j)

ii) $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p(x_i, y_j) = 1$

- Observação: A notação $P(X = x_i, Y = y_j)$ representa intersecção, ou seja, $P(X = x_i \cap Y = y_j)$.

- Ao conjunto $\{(x_i, y_j), p(x_i, y_j),\ i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n\}$ dá-se o nome de distribuição conjunta de probabilidades da variável bidimensional (X, Y)

- Exemplo: Dado o quadro a seguir, referente ao salário e tempo de serviço de dez operários, determinar a distribuição conjunta de probabilidade da variável X: salário (\$); e da variável Y: tempo de serviço (anos).

Distribuição conjunta de probabilidade de duas v.a.'s

Operário	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
X	500	600	600	800	800	800	700	700	700	600
Y	6	5	6	4	6	6	5	6	6	5

- A tabela de dupla entrada, contendo a probabilidade conjunta das v.a.'s X e Y é feita da seguinte forma:
  Por exemplo: $P(X = 800, Y = 6) = 2/10$, pois temos dois operários com 6 anos de serviço auferindo \$ 800;
- $P(X = 700, Y = 4) = 0$, pois não há nenhum operário que ganhe \$ 700 e tenha 4 anos de serviço.

Distribuição conjunta de probabilidade de duas v.a.'s

Operário	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
X	500	600	600	800	800	800	700	700	700	600
Y	6	5	6	4	6	6	5	6	6	5

- A tabela de dupla entrada, contendo a probabilidade conjunta das v.a.'s X e Y é feita da seguinte forma:
  Por exemplo: $P(X = 800, Y = 6) = 2/10$, pois temos dois operários com 6 anos de serviço auferindo \$ 800;

- $P(X = 700, Y = 4) = 0$, pois não há nenhum operário que ganhe \$ 700 e tenha 4 anos de serviço.

- De modo análogo, obtemos as demais probabilidades conjuntas

Y	X				Totais das linhas
	500	600	700	800	
4	0	0	0	1/10	1/10
5	0	2/10	1/10	0	3/10
6	1/10	1/10	2/10	2/10	6/10
Totais das colunas	1/10	3/10	3/10	3/10	1

Distribuições marginais

- As distribuições marginais: são distribuições individuais de X e Y obtidas a partir da distribuição conjunta de (X, Y)

- Definição Sejam $X = (x_1, x_2, x_3 \ldots, x_m)$ e $Y = (y_1, y_2, y_3 \ldots, y_n)$ duas v.a.'s discretas com função de probabilidade conjunta $p(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j)$. Sejam p_X e p_Y as correspondentes funções de probabilidade marginais de X e de Y. Então

$$p_X(x_i) = P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{n} p(x_i, y_j) \; i = 1, 2, \ldots, m \quad \text{e}$$

$$p_Y(y_j) = P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{m} p(x_i, y_j) \; j = 1, 2, \ldots, n$$

- Exemplo (cont.): Para obter a probabilidade marginal de $Y = 6$, somamos as probabilidades $p(x, 6)$ para todos os valores possíveis de x, ou seja,

Distribuições marginais

$$\begin{aligned}
p_Y(6) =& P(X = 500, Y = 6) + P(X = 600, Y = 6) + P(X = 700, Y = 6) \\
&+ P(X = 800, Y = 6) \\
=& \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{2}{10} + \frac{2}{10} = \frac{6}{10}
\end{aligned}$$

Para obter a probabilidade marginal de $X = 800$, somamos as probabilidades $p(800, y)$ para todos os valores possíveis de y, ou seja,

Distribuições marginais

$$\begin{aligned}
p_Y(6) =& P(X = 500, Y = 6) + P(X = 600, Y = 6) + P(X = 700, Y = 6) \\
&+ P(X = 800, Y = 6) \\
=& \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{2}{10} + \frac{2}{10} = \frac{6}{10}
\end{aligned}$$

Para obter a probabilidade marginal de $X = 800$, somamos as probabilidades $p(800, y)$ para todos os valores possíveis de y, ou seja,

$$\begin{aligned}
p_X(800) =& P(X = 800, Y = 4) + P(X = 800, Y = 5) \\
&+ P(X = 800, Y = 6) \\
=& \frac{1}{10} + 0 + \frac{2}{10} = \frac{3}{10}
\end{aligned}$$

Distribuições, Esperança e Variância condicionais

- Poderemos estar interessados em calcular $E(X|Y=5)$;
- Definição: A função de probabilidade condicional de X dado que $Y=y_j$ é dada por:

$$p_{X|Y}(x_i|y_j) = P(X=x_i|Y=y_j) = \frac{P(X=x_i, Y=y_j)}{P(Y=y_j)},$$
$$j = \text{fixo}; i = 1, 2, \ldots, m; p(y_j) \neq 0$$

- Analogamente, a função de probabilidade condicional de Y dado que $X=x_i$ é dada por:

$$p_{Y|X}(y_j|x_i) = P(Y=y_j|X=x_i) = \frac{P(X=x_i, Y=y_j)}{P(X=x_i)},$$
$$i = \text{fixo}; j = 1, 2, \ldots, n; p(x_i) \neq 0$$

Distribuições, Esperança e Variância condicionais

- A esperança condicional de X dado $Y = y_j$ é

$$E(X|Y = y_j) = \sum_{i=1}^{m} x_i \times p(x_i|y_j) = \sum_{i=1}^{m} x_i \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)}$$

- A esperança condicional de Y dado $X = x_i$ é:

$$E(Y|X = x_i) = \sum_{j=1}^{n} y_j \times p(y_j|x_i) = \sum_{j=1}^{n} y_j \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)}$$

- Assim

$$P(X = 500|Y = 5) = \frac{P(X = 500, Y = 5)}{P(Y = 5)} = \frac{0}{3/10} = 0$$

$$P(X = 600|Y = 5) = \frac{P(X = 600, Y = 5)}{P(Y = 5)} = \frac{2/10}{3/10} = 2/3$$

$$P(X = 700|Y = 5) = \frac{P(X = 700, Y = 5)}{P(Y = 5)} = \frac{1/10}{3/10} = 1/3$$

$$P(X = 800|Y = 5) = \frac{P(X = 8, Y = 5)}{P(Y = 5)} = \frac{0}{3/10} = 0$$

- Calculando $E(X|Y = 5)$, teremos:

X	$P(X\|Y = 5)$	$X \cdot P(X\|Y = 5)$
500	0	0
600	$2/3$	$1200/3$
700	$1/3$	$700/3$
800	0	0
$\sum$	1	$1900/3$

- Então $E(X|Y = 5) = 633,33$;
- O salário médio dos operários com cinco anos de serviço é de $ 633,33.

Distribuições, Esperança e Variância condicionais

Da mesma forma, podemos definir as variâncias condicionais.

- A variância condicional de X dado $Y = y_j$ é:

$$
\begin{aligned}
Var(X|Y = y_j) =& E\left[\{X - E(X|Y = y_j)\}^2 | Y = y_j\right] \\
=& E(X^2|Y = y_j) - \{E(X|Y = y_j)\}^2,
\end{aligned}
$$

onde $E(X^2|Y = y_j) = \sum_{i=1}^{m} x_i^2 p_{X|Y}(x_i|y_j)$

- A variância condicional de Y dado $X = x_i$ é:

$$
\begin{aligned}
Var(Y|X = x_i) =& E\left[\{Y - E(Y|X = x_i)\}^2 | X = x_i\right] \\
=& E(Y^2|X = x_i) - \{E(Y|X = x_i)\}^2,
\end{aligned}
$$

onde $E(Y^2|X = x_i) = \sum_{j=1}^{n} y_j^2 p_{Y|X}(y_j|x_i)$

Distribuições, Esperança e Variância condicionais

Exemplo: Calculando o tempo médio de serviço e o desvio padrão dos operários com salários de \$ 700,00.

- Queremos $E(Y|X=700)$ e $Var(Y|X=700)$

Y	$P(Y\|X=700)$	$Y \cdot P(Y\|X=700)$	$Y^2 \cdot P(Y\|X=700)$
4	0	0	0
5	$1/3$	$5/3$	$25/3$
6	$2/3$	$12/3$	$72/3$
	1	$17/3$	$97/3$

- Portanto

$$E(Y|X=700) = \frac{17}{3} = 5,67$$

$$Var(Y|X=700) = \frac{97}{3} - \left(\frac{17}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$$

$$\sigma(Y|X=700) = \sqrt{\frac{2}{9}} = 0,47$$

Variáveis aleatórias independentes

Sejam $\begin{cases} X : x_1, x_2, \ldots, x_m & \text{e} \quad P(X = x_i) = p(x_i), i = 1, \ldots, m \\ Y : y_1, y_2, \ldots, y_n, & \text{e} \quad P(Y = y_j) = p(y_j), j = 1, \ldots, n \end{cases}$

- Definição: As v.a.'s X e Y são independentes se, e somente se, $P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j)$, para todo par $(x_i, y_j), i = 1, 2, \ldots, m$ e $j = 1, 2, \ldots, n$.

- As variáveis X e Y do problema dos operários não são independentes, pois, por exemplo,
  - $P(X = 500, Y = 4) = 0 \quad P(X = 500) \cdot P(Y = 4) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{100}$
  - $P(X = 500, Y = 4) \neq P(X = 500) \cdot P(X = 4)$.

Resultados importantes

$$\text{Sejam} \begin{cases} X : x_1, x_2, \ldots, x_m & \text{e} \quad P(X = x_i) = p(x_i), i = 1, \ldots, m \\ Y : y_1, y_2, \ldots, y_n, & \text{e} \quad P(Y = y_j) = p(y_j), j = 1, \ldots, n \\ (X, Y) : (x_1, y_1), \ldots, (x_m, y_n) & \text{e} \quad P(X = x_i, Y = y_j) = p(x_i, y_j). \end{cases}$$

i) $E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$

ii) Covariância entre X e Y: $cov(X, Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)$

iii) São X e Y são independentes, então $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$

iv) Se X e Y são independentes, então $cov(X, Y) = 0$. A reciproca não é verdadeira.

v) Se X e Y são independentes, então $Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y)$

vi) Se $X_1, X_2, \ldots, X_m$ são independentes, então

$$Var\left(\sum_{i=1}^{m} X_i\right) = \sum_{i=1}^{m} Var(X_i)$$

Coeficiente de Correlação

Assim como a covariância, o coeficiente de correlação mede o grau de dependência entre X e Y.

- Definição: Coeficiente de correlação é definido como

$$\rho = \frac{cov(X, Y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$$

  e $|\rho| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \rho \leq +1$.

- Lembre-se que a covariância fornece uma medida ao quadrado;
- Além disso, o campo de sua variação é muito amplo, isto é, $-\infty < cov(X, Y) < +\infty$
- Quanto mais próximo for ρ de $+1$ e ρ de -1, maior o grau de dependência entre X e Y

Exemplo de aplicação

Considere a distribuição conjunta de probabilidades da v.a (X, Y)

X	Y			
	0	1	2	3
0	1/8	2/8	1/8	0
1	0	1/8	2/8	1/8

Calcule

i) $E(2X - 3Y)$

ii) $Cov(X, Y)$

iii) $Var(2X - 3Y)$

iv) $E(Y|X = 1)$

v) ρ

Exemplo de aplicação

Resolução:

X	Y						
	0	1	2	3	$P(X)$	$X \cdot P(X)$	$X^2 \cdot P(X)$
0	1/8	2/8	1/8	0	4/8	0	0
1	0	1/8	2/8	1/8	4/8	4/8	4/8
$P(Y)$	1/8	3/8	3/8	1/8	1	$E(X) = \frac{1}{2}$	$E(X^2) = \frac{1}{2}$
$Y \cdot P(Y)$	0	3/8	6/8	3/8	$E(Y) = 3/2$		
$Y^2 \cdot P(Y)$	0	3/8	12/8	9/8	$E(Y^2) = 3$		

- $P(X = 0, Y = 0) = 1/8$, $P(X = 0) = 4/8$ e $P(Y = 0) = 1/8$.
- $P(X = 0, Y = 0) \neq P(X = 0) \cdot P(Y = 0)$. Portanto X e Y não são independentes.
- $E(X) = E(X^2) = 0,5$; $Var(X) = 0,5 - 0,5^2 = 0,25$ e $\sigma_x = 0,5$
- $E(Y) = 1,5$; $E(Y^2) = 0,3$; $Var(Y) = 3 - 1,5^2 = 0,75$ e $\sigma_y = 0,87$

Exemplo de aplicação

Resolução:

i) $E(2X - 3Y) = 2E(X) - 3E(Y) = 2 \cdot 0,5 - 3 \cdot 1,5 = -3,5$

ii) Para calcular $Cov(X, Y)$, definiremos a v.a. $Z = X \cdot Y$ e encontramos a distribuição de Z

Z	$P(Z)$	$Z \cdot P(Z)$
0	4/8	0
1	1/8	1/8
2	2/8	4/8
3	1/8	3/8
	1	$E(Z) = E(X \cdot Y) = 1$

Portanto

$$\begin{aligned} cov(X, Y) =& E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) \\ =& 1 - 0,5 \cdot 1,5 = 0,25 \end{aligned}$$

Exemplo de aplicação

Resolução:

iii) $Var(2X - 3Y) = ?$

$$\begin{aligned} Var(2X - 3Y) =& Var(2X) + Var(3Y) - 2cov(2X, 3Y) \\ =& 4Var(X) + 9Var(Y) - 12cov(X, Y) \\ =& 4 \cdot 0,25 + 9 \cdot 0,75 - 12 \cdot 0,25 = 4,75 \end{aligned}$$

iv) $E(Y|X = 1)$

Y	$P(Y\|X = 1)$	$Y \cdot P(Y\|X = 1)$
0	0	0
1	1/4	1/4
2	2/4	4/4
3	1/4	3/4
	1	$E(Y\|X = 1) = 2$

v) $\rho = \frac{cov(X,Y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{0,25}{0,5 \cdot 0,87} = 0,575$