Estatística Aplicada a Recursos Hídricos

Docente: Rachid Muleia

(rachid.muleia@uem.mz)

Mestrado em Gestão de Recursos Hídricos - DGEO/UEM

Tema: Variáveis Aleatórias Contínuas

Ano lectivo: 2023/Semestre: I

Conceitos e notações de v.a.'s contínuas

Uma v.a. é contínua: seu conjunto de valores possíveis consiste de um intervalo completo de todos os valores. Exemplos:

- O tempo de chegada de um comboio em uma determinada estação;
- O tempo de vida de um dispositivo electrónico;
- A profundidade máxima de um lago em um ponto da superfície escolhido aleatoriamente.

Definição: Dizemos que X é uma variável aleatória contínua em $\mathbb{R}$ se existir uma função $f(x)$, tal que:

1) $f(x) \geq 0$ (não negativa)
2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

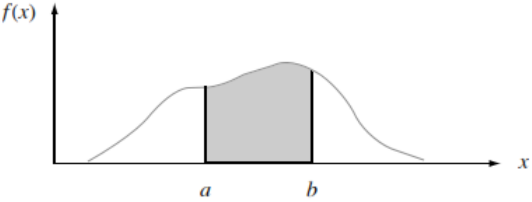
- Nesse caso, a função $f(x)$ é chamada função densidade de probabilidade (fdp)

Conceitos e notações de v.a.'s contínuas

- Observe que, para quaisquer dois números a e b com $a \leq b$,

$$\boxed{P(a \leq X \leq a) = \int_a^b f(x)dx}$$

- significa que a $P(X \in [a, b])$ é a área contida entre o intervalo e abaixo da curva da função de densidade.



- O gráfico de $f(x)$ normalmente é denominado curva de densidade;
- $P(a \leq X \leq a) =$ a área abaixo da curva de densidade, entre a e b.

Conceitos e notações de v.a.'s contínuas

- Se X é uma v.a. discreta, obtém-se, para cada x_i, uma $P(X = x_i)$ positiva;
- Se X é uma v.a. contínua, então para qualquer c, $P(X = c) = 0$, i.e.

$$\int_c^c f(x)dx = 0$$

- Além disso, para quaisquer dois números a e b com $a < b$,

$$\begin{aligned} P(a \leq X \leq b) =& P(a < X \leq b) \\ =& P(a \leq X < b) = P(a < X < b) \end{aligned}$$

- Ou seja, a probabilidade atribuída a qualquer valor específico é zero e a probabilidade de um intervalo não depende da inclusão ou não de seus pontos extremos

Conceitos e notações de v.a.'s contínuas

Exemplo 1: Um professor de faculdade nunca finaliza sua aula antes do final do horário e sempre termina dentro de dois minutos após o horário. Seja X: "tempo entre o fim do horário e o fim da aula", e suponha que a fdp de X seja

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}x^2, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

i) Verifique que $f(x)$ é uma função densidade legítima.
ii) Qual é a probabilidade de a aula terminar dentro de 1 minuto após final do horário?
iii) Qual é a probabilidade de a aula continuar por pelo menos 90 segundos após o final do horário?

Respostas:

Conceitos e notações de v.a.'s contínuas

Exemplo 1: Um professor de faculdade nunca finaliza sua aula antes do final do horário e sempre termina dentro de dois minutos após o horário. Seja X: "tempo entre o fim do horário e o fim da aula", e suponha que a fdp de X seja

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}x^2, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

i) Verifique que $f(x)$ é uma função densidade legítima.
ii) Qual é a probabilidade de a aula terminar dentro de 1 minuto após final do horário?
iii) Qual é a probabilidade de a aula continuar por pelo menos 90 segundos após o final do horário?

Respostas:

i) Para verificar que $f(x)$ é uma f.d.p., basta mostrar que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

$$\int_0^2 \frac{3}{8}x^2 dx = \frac{3}{8}\int_0^2 x^2 dx = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3}x^3\Big|_{x=0}^{x=2} = \frac{1}{8}(8-0) = 1$$

Portanto, $f(x)$ é de facto uma f.d.p.

Conceitos e notações de v.a.'s contínuas

Resolução (Cont.):

ii) Probabilidade de a aula terminar dentro de 1 minuto do final do horário;

$$P(0 < X < 1) = \int_0^1 \frac{3}{8}x^2 dx = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3}x^3 \Big|_{x=0}^{x=1}$$
$$= \frac{1}{8}(1-0) = \frac{1}{8} = 0,125$$

Significa que $12,5\%$ das aulas terminam dentro de 1 minuto após o horário.

iii) Probabilidade de a aula continuar por pelo menos 90 segundos após o final do horário:

$$P(X > 1,5) = \int_{1,5}^2 \frac{3}{8}x^2 dx = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3}x^3 \Big|_{x=1,5}^{x=2}$$
$$= \frac{1}{8}(8-3,375) = \frac{4,625}{8} = 0,5781$$

Aproximadamente $57,8\%$ das aulas continuam por pelo menos 90 segundos após o horário.

Conceitos e notações de v.a.'s contínuas

Exemplo 2: O tempo de vida útil (em anos) de um equipamento electrónico de determinado tipo pode ser expresso por uma v.a. contínua X, cuja função de densidade é

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{x}{2}\right), & \text{para } x \geq 0 \\ 0, & \text{para } x < 0. \end{cases}$$

Determine a probabilidade de que o equipamento dure:

i) mais de três anos;

ii) entre seis e dezoito meses.

Respostas:

- Primeiramente, vamos verificar que a função dada é uma legítima função de densidade.

Exemplo 2: O tempo de vida útil (em anos) de um equipamento electrónico de determinado tipo pode ser expresso por uma v.a. contínua X, cuja função de densidade é

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{x}{2}\right), & \text{para } x \geq 0 \\ 0, & \text{para } x < 0. \end{cases}$$

Determine a probabilidade de que o equipamento dure:

i) mais de três anos;

ii) entre seis e dezoito meses.

Respostas:

- Primeiramente, vamos verificar que a função dada é uma legítima função de densidade.
  - ➜ Observa-se que $f(x) \geq 0$ para todo x real; e que
  - ➜ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{2}\exp(-x/2)dx = 1$

Conceitos e notações de v.a.'s contínuas

Resolução (Cont.):

i) Probabilidade de que o equipamento dure mais de três anos;

$$P(X > 3) = \int_3^{+\infty} \frac{1}{2} \exp(-x/2)dx = -\exp(-x/2)\Big|_{x=3}^{x=+\infty}$$
$$= \exp(-3/2) = 0,2231$$

Significa que $22,3\%$ dos equipamentos desse tipo duram mais de três anos.

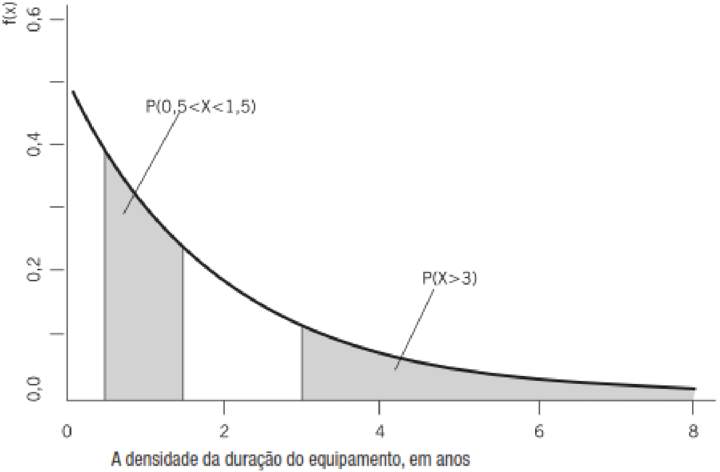
ii) Probabilidade de que o equipamento dure entre 6 e 18 meses.

$$P(0,5 \leq X < 1,5) = \int_{0,5}^{1,5} \frac{1}{2} \exp(-x/2)dx$$
$$= \exp(-0,5/2) - \exp(-1,5/2) = 0,3064$$

Aproximadamente em $30,6\%$ dos casos, o tempo de vida do equipamento varia entre seis e 18 meses.

Conceitos e notações de v.a.'s contínuas

Resolução (Cont.): Gráfico da função de densidade de X.



Conceitos e notações de v.a.'s contínuas

Exemplo 3: Suponha que X seja uma variável aleatória contínua cuja função densidade de probabilidade é dada por

$$f(x) = \begin{cases} C(4x - 2x^2), & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

i) Qual é o valor de C?;

ii) Determine $P(X > 1)$

Solução:

Exemplo 3: Suponha que X seja uma variável aleatória contínua cuja função densidade de probabilidade é dada por

$$f(x) = \begin{cases} C(4x - 2x^2), & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

i) Qual é o valor de C?;

ii) Determine $P(X > 1)$

Solução:

i) Uma vez que f é uma função densidade de probabilidade, então $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, o que implica;

$$\begin{aligned} C\int_0^2 (4x - 2x^2)dx &= 1 \\ C\left[2x^2 - \frac{2x^3}{3}\right]\Big|_{x=0}^{x=2} &= 1 \\ C &= \frac{3}{8} \end{aligned}$$

Resolução (Cont.):

ii) Uma vez calculado o C, então

$$\begin{aligned} P(X > 1) &= \int_1^{\infty} f(x)dx \\ &= \frac{3}{8}\int_1^{2}(4x - 2x^2)dx \\ &= \frac{3}{8}\left[2x^2 - \frac{2x^3}{3}\right]\Big|_{x=1}^{x=2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Função de distribuição de uma v.a. contínua

- A função de distribuição, $F(x)$, da v.a. contínua é análoga a da v.a. discreta.
- Envolve a substituição do somatório pelo símbolo de integral;
- Lembre-se que $F(x)$ de uma v.a. discreta X é definida como

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i)$$

- Definição: Se X é uma v.a. contínua, com função densidade f, sua função distribuição $F(x)$, definida para cada x, é

$$\boxed{F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt}$$

- Para cada x, $F(x)$ é a área abaixo da curva de densidade à esquerda de x.
- O gráfico de $F(x)$ de uma v.a. contínua não é uma "função escada", mas uma função contínua.

Propriedades da função $F(x)$ para v.a. contínua

i) F é uma função contínua.

ii) F é uma função não decrescente, ou seja, $x < y$ implica $F(x) \leq F(y)$

iii) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$; e $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$;

iv) Se $a < b$, $P[a < X < b] = F(b) - F(a)$

Exemplo 4: Seja, novamente, X: "tempo entre o fim do horário e o fim da aula". Ao calcularmos $F(x)$, observamos que:

1) Para $x < 0$ ou $x > 2$, $f(x) = 0$ e $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t) = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$

2) Para $0 \leq x \leq 2$, $F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{x} \frac{3}{8} t^2 dt = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3} t^3 \Big|_{t=0}^{t=x} = \frac{1}{8} x^3$;

3) Portanto,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{8} x^3, & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ 1, & \text{se } x > 2. \end{cases}$$

Propriedades da função $F(x)$ para v.a. contínua

Exemplo 5: Ainda sobre o tempo de vida útil de um equipamento electrónico. Ao calcularmos $F(x)$, observamos que:

1) Se $x < 0$, $f(x) = 0$ e $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t) = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$

2) Se $x \geq 0$ $F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dt + \int_{0}^{x} \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{t}{2}\right) dt = 1 - \exp\left(-\frac{x}{2}\right), sex \geq 0$

3) Resumindo,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ 1 - \exp(-x/2), & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

Uso de $F(x)$ para Calcular as Probabilidades

- Assim como no caso de v.a.'s discretas, as probabilidades de diversos intervalos podem ser calculadas usando uma formula de $F(x)$.

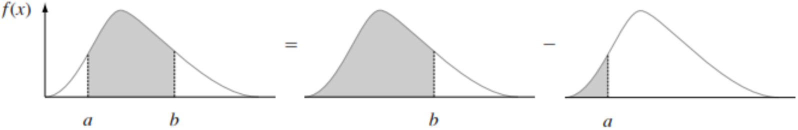
- Proposição: Seja X uma v.a. contínua com fdp $f(x)$ e f.d. F(x). Então, para qualquer a,

$$P(X > a) = 1 - F(a)$$

e para quaisquer a e b, com $a < b$,

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$$

- ilustração a segunda parte da proposição:



Calculo de $P(a \leq X \leq b)$ pelas de probabilidades acumuladas

Uso de $F(x)$ para Calcular as Probabilidades

Exemplo 6: Ainda sobre o tempo de vida útil de um equipamento electrónico.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{x}{2}\right), & \text{para } x \geq 0 \\ 0, & \text{para } x < 0. \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ 1 - \exp(-x/2), & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

Então

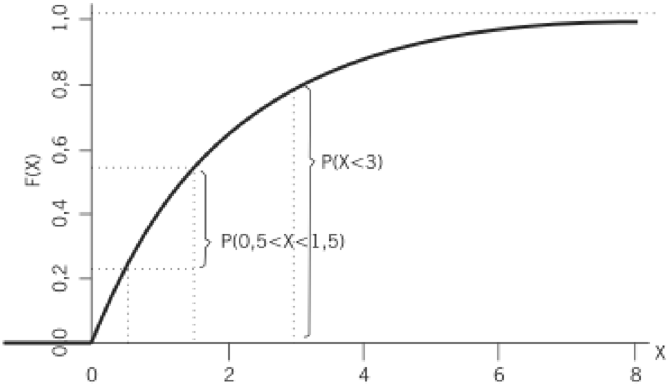
1) Probabilidade de que o equipamento dure mais de três anos:

$$\begin{aligned} P(X > 3) =& 1 - P(X \leq 3) = 1 - F(3) \\ & 1 - [1 - \exp(-3/2)] = \exp(-1,5) = 0,2231 \end{aligned}$$

2) Probabilidade de que o equipamento dure entre 6 e 18 meses

$$\begin{aligned} P(0,5 \leq X \leq 1,5) =& F(1,5) - F(0,5) \\ =& [1 - \exp(-1,5/2)] - [1 - \exp(-0,5/2)] \\ =& \exp(-0,25) - \exp(-0,75) = 0,3064 \end{aligned}$$

Uso de $F(x)$ para Calcular as Probabilidades



A FD da duração do tempo de vida útil de um equipamento eletrônico

Uso de $F(x)$ para Calcular as Probabilidades

Exemplo 7: A distribuição da quantidade de pedra brita (em toneladas) vendida por uma empresa de materiais de construção em uma semana é uma va contínua X com fdp

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}(1 - x^2), & \text{para } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Use $F(x)$ para calcular a probabilidade de que, em uma semana, a empresa venda

i) pelo menos trezentos quilos de pedra brita;

ii) entre 300 e 750 quilos de pedra brita.

Respostas:

- A função de distribuição de vendas para qualquer x entre 0 e 1 é

Uso de $F(x)$ para Calcular as Probabilidades

Exemplo 7: A distribuição da quantidade de pedra brita (em toneladas) vendida por uma empresa de materiais de construção em uma semana é uma va contínua X com fdp

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}(1 - x^2), & \text{para } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Use $F(x)$ para calcular a probabilidade de que, em uma semana, a empresa venda

i) pelo menos trezentos quilos de pedra brita;

ii) entre 300 e 750 quilos de pedra brita.

Respostas:

- A função de distribuição de vendas para qualquer x entre 0 e 1 é

$$F(x) = \int_0^x \frac{3}{2}(1 - t^2)dt = \frac{3}{2}\left(t - \frac{t^3}{3}\right)\Big|_{t=0}^{t=x} = \frac{3}{2}\left(x - \frac{x^3}{3}\right)$$

Uso de $F(x)$ para Calcular as Probabilidades

i) $P(X > 0,3)$ (vender pelo menos trezentos quilos):

$$\begin{aligned} P(X > 0,3) =& 1 - P(X \leq 0,3) = 1 - F(0,3) \\ =& 1 - \frac{3}{2}\left[0,3 - \frac{(0,3)^3}{3}\right] = 1 - \frac{0,873}{2} = 0,5635 \end{aligned}$$

ii) $P(0,3 \leq X \leq 0,75)$ (vender entre 300 e 750 quilos).

$$\begin{aligned} P(0,3 \leq X \leq 0,75) =& F(0,75) - F(0,3) \\ =& \frac{3}{2}\left[0,75 - \frac{(0,75)^3}{3}\right] - 0,5635 \\ =& 0,9141 - 0,5635 = 0,3506 \end{aligned}$$

- Para X discreta, a fmp é obtida pela f.d. calculando-se a diferença entre dois valores $F(x)$
- Proposição: Se X for uma v.a. contínua com fdp $f(x)$ e f.d. $F(x)$ então, para qualquer x em que a derivada $F'(x)$ existir,

$$F'(x) = f(x)$$

Valor esperado e variância de v.a.'s contínuas

- Para v.a.'s contínuas, as definições de $E(X)$ e $Var(X)$ são análogas às do caso discreto, sendo a soma substituída pela integral e a fmp pela fdp.
- Definição: O valor médio ou esperado de uma v.a. contínua X com fdp $f(x)$ é

$$\boxed{\mu_x = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx}$$

Exemplo 8: Considere a fdp das vendas semanais de pedra brita X

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}(1 - x^2), & \text{para } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário. Então} \end{cases}$$

Valor esperado e variância de v.a.'s contínuas

- Para v.a.'s contínuas, as definições de $E(X)$ e $Var(X)$ são análogas às do caso discreto, sendo a soma substituída pela integral e a fmp pela fdp.
- Definição: O valor médio ou esperado de uma v.a. contínua X com fdp $f(x)$ é

$$\boxed{\mu_x = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx}$$

Exemplo 8: Considere a fdp das vendas semanais de pedra brita X

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}(1 - x^2), & \text{para } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário. Então} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx = \int_{0}^{1} x \cdot \frac{3}{2}(1 - x^2) dx \\ &= \frac{3}{2} \int_{0}^{1} (x - x^3) dx = \frac{3}{2} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right) \Bigg|_{x=0}^{x=1} = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

Valor esperado e variância de v.a.'s contínuas

- Definição: A variância de uma v.a. contínua X com fdp $f(x)$ e média μ é

$$\sigma_x^2 = Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \cdot f(x)dx \quad \text{ou}$$
$$Var(x) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

onde $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)dx$

- O desvio padrão de X é $\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$

Exemplo 9: Para $X =$ venda semanal de pedra brita, calculamos $E(X) = \frac{3}{8}$. Como

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)dx = \int_0^1 x^2 \cdot \frac{3}{2}(1-x^2)dx$$
$$= \frac{3}{2}\int_0^1 (x^2 - x^4)dx = \frac{3}{2}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{5}$$

Valor esperado e variância de v.a.'s contínuas

- Então a variância de X é

$$\begin{aligned} Var(x) =& E(X^2) - [E(X)]^2 \\ =& \frac{1}{5} - \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{19}{320} = 0,059 \end{aligned}$$

- O desvio padrão de X é $\sigma_X = \sqrt{0,059} = 0,244$.