Estatística Aplicada à Recursos Hídricos

Docente: Rachid Muleia

(rachid.muleia@uem.mz)

Mestrado em Gestão de Recursos Hídricos- DGEO/UEM

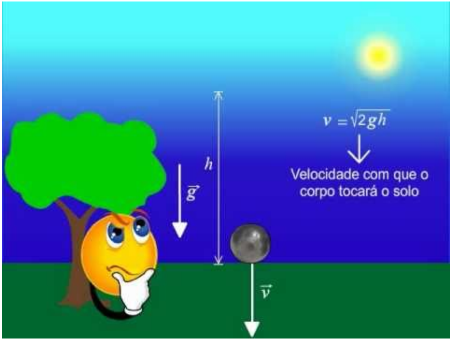
Tema: Introdução à Probabilidade

Ano lectivo: 2023

Conceitos em Probabilidades

Existem na natureza dois tipos de fenômenos de observação:

- Fenômenos determinísticos - produzem sempre o mesmo resultado quando as condições iniciais são as mesmas.
  Exemplo: A velocidade final de um corpo em queda livre no vácuo.



➜ Mantidas as mesmas condições, as variações obtidas para o valor da velocidade são praticamente desprezíveis.

➜ O modelo matemático: determinístico ou estático.

Conceitos em Probabilidades

- Fenômenos aleatórios - fornecem resultados diferentes (imprevisíveis), mesmo quando as condições iniciais são as mesmas.
  - ➜ Exemplo: Lançamento de uma moeda não viciada.

  - ➜ São conhecidos os possíveis resultados (cara ou coroa), mas não se pode precisar qual deles será obtido.
  - ➜ O modelo matemático: probabilístico ou estocástico.

Conceitos em Probabilidades

- Experimento aleatório - qualquer fenómeno que, repetido sob as mesmas condições iniciais, produz resultados diferentes e imprevisíveis. Por exemplo:
  i) O tempo gasto (em minutos) de chapa diariamente entre casa e faculdade;
  ii) Sexo de três filhos de um casal segundo a ordem do nascimento.

Conceitos em Probabilidades

- Experimento aleatório - qualquer fenómeno que, repetido sob as mesmas condições iniciais, produz resultados diferentes e imprevisíveis. Por exemplo:
  i) O tempo gasto (em minutos) de chapa diariamente entre casa e faculdade;
  ii) Sexo de três filhos de um casal segundo a ordem do nascimento.

- Espaço amostral (denotado por Ω) - conjunto de todos resultados possíveis de um experimento aleatório. Nos exemplos acima, tem-se:
  i) $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots\}$;
  ii) $\Omega = \{MMM, MMF, MFM, FMM, MFF, FMF, FFM, FFF\}$.

Conceitos em Probabilidades

- Experimento aleatório - qualquer fenómeno que, repetido sob as mesmas condições iniciais, produz resultados diferentes e imprevisíveis. Por exemplo:
  i) O tempo gasto (em minutos) de chapa diariamente entre casa e faculdade;
  ii) Sexo de três filhos de um casal segundo a ordem do nascimento.

- Espaço amostral (denotado por Ω) - conjunto de todos resultados possíveis de um experimento aleatório. Nos exemplos acima, tem-se:
  i) $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots\}$;
  ii) $\Omega = \{MMM, MMF, MFM, FMM, MFF, FMF, FFM, FFF\}$.

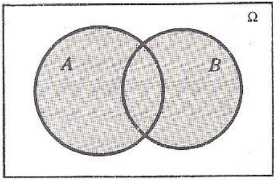
- Evento- subconjunto do espaço amostral. É denotado por uma letra maiúscula. Alguns eventos do experimento *ii)*:
  - ➜ A="ocorrência de pelo menos dois filhos do sexo masculino";
    $A = \{MMF, MFM, FMM, MMM\}$
  - ➜ B="ocorrência de dois filhos do mesmo sexo";
    $B = \{MMF, MFM, FMM, MFF, FMF, FFM\}$

Operações com eventos

- Considere $\Omega = \{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n\}$. Sejam A e B dois eventos de Ω. As seguintes operações são definidas:

  1) Evento união: é formado pelos pontos amostrais que pertencem a pelo menos um dos eventos.

$$A \cup B = \{e_i \in \Omega | e_i \in A \text{ ou } e_i \in B\}, i = 1, 2, \ldots, n$$



Exemplo: Lançam-se duas moedas. Sejam A : saída de faces iguais; B : saída de cara na primeira moeda. Determine o evento $A \cup B$.

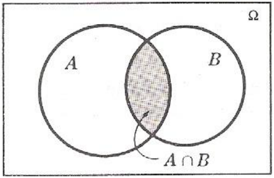
Resolução: $\Omega = \{(Ca, Ca), (Ca, Co), (Co, Ca), (Co, Co)\}$

$A = \{(Ca, Ca), (Co, Co)\}$; $\quad B = \{(Ca, Ca), (Ca, Co)\}$

$A \cup B = \{(Ca, Ca), (Ca, Co), (Co, Co)\}$

2) Evento intersecção: é formado pelos pontos amostrais que pertencem simultaneamente aos eventos A e B.

$$A \cap B = \{e_i \in \Omega | e_i \in A \text{ e } e_i \in B\}, i = 1, 2, \ldots, n$$



Exemplo: Considere os eventos A e B do exemplo anterior. Determine o evento $A \cap B$.

Resolução: $A = \{(Ca, Ca), (Co, Co)\}$; $B = \{(Ca, Ca), (Ca, Co)\}$

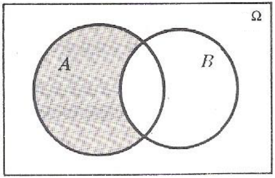
$A \cap B = \{(Ca, Ca)\}$

Observação: Se $A \cap B = \emptyset$, A e B são mutuamente exclusivos.

Operações com eventos

3) Evento diferença: O conjunto formado pelos pontos amostrais de A que não pertencem a B é chamado diferença de A e B;

$$A - B = A \cap \overline{B} = \{e_i \in \Omega | e_i \in A \text{ e } e_i \notin B\}, i = 1, 2, \ldots, n$$



O evento A pode ser escrito como união de eventos mutuamente exclusivos:

$$A = (A - B) \cup (A \cap B).$$

Por conseguinte:

$$\boxed{A - B = A \cap \bar{B} = A - A \cap B}.$$

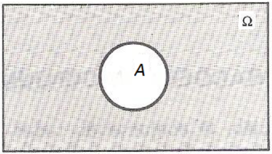
Exemplo: Dados os eventos A e B, determine os eventos $A - B$ e $B - A$.
Resolução: $A = \{(Ca, Ca), (Co, Co)\}$; $B = \{(Ca, Ca), (Ca, Co)\}$

$A - B = \{(Co, Co)\}$; $B - A = \{(Ca, Co)\}$

Operações com eventos

4) Evento complementar: O conjunto formado pelos pontos amostrais de Ω que não pertencem a A é chamado complementar de A e B;

$$\overline{A} = \Omega - A = \{e_i \in \Omega | e_i \notin A\}, i = 1, 2, \ldots, n$$



Exemplo: Considere os eventos A e B do exemplo anterior. Determine o evento $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{A \cap B}$, $\overline{A \cup B}$, $\overline{A} \cup \overline{B}$ e $\overline{A} \cap \overline{B}$.

Resolução: $A = \{(Ca, Ca), (Co, Co)\}$; $B = \{(Ca, Ca), (Ca, Co)\}$

$\overline{A} = \{(Co, Ca), (Ca, Co)\}$; $\overline{B} = \{(Co, Co), (Co, Ca)\}$

$\overline{A \cap B} = \{(Co, Co), (Co, Ca), (Ca, Co)\}$; $\overline{A \cup B} = \{(Co, Ca)\}$

$\overline{A} \cup \overline{B} = \{(Co, Co), (Co, Ca), (Ca, Co)\}$; $\overline{A} \cap \overline{B} = \{(Co, Ca)\}$

Algumas propriedades das operações

Sejam A, B e C eventos associados a um espaço amostral Ω. As seguintes propriedades são válidas:

i) Comutativas: $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$

ii) Associativas: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$; $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

iii) Distributivas:
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

iv) Absorções: $A \cup (A \cap B) = A$; $A \cap (A \cup B) = A$

v) Identidades: $A \cap \Omega = A$; $A \cup \Omega = \Omega$; $A \cap \emptyset = \emptyset$; $A \cup \emptyset = A$

vi) Complementares: $\overline{\Omega} = \emptyset$; $\overline{\emptyset} = \Omega$; $A \cap \overline{A} = \emptyset$; $A \cup \overline{A} = \Omega$

vii) "Leis de DeMorgan": $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$; $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Usando o conceito da diferença e a propriedade iii), tem-se, para quaisquer eventos A, B e C, que:

$$A - (B \cup C) = A \cap \overline{B \cup C} = A - A \cap (B \cup C) = A - [(A \cap B) \cup (A \cap C)]$$

$$A - (B \cap C) = A \cap \overline{B \cap C} = A - A \cap (B \cap C) = A - [(A \cap B) \cap (A \cap C)]$$

Técnicas de Contagem

- Nem sempre é possível enumerar o espaço amostral e os eventos de forma directa; Nesses casos usamos a análise combinatória como processo de contagem: permutações, combinações e arranjos

Princípio básico de contagem

Dados r experimentos. Se o experimento 1 pode gerar n_1 resultados possíveis e se, para cada um desses n_1 resultados, houver n_2 resultados possíveis para o experimento 2; e se, para cada um dos resultados conjuntos de n_1 e n_2, houver n_3 resultados possíveis para experimento 3; e assim por diante, então os r experimentos possuem conjuntamente $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots \times n_r$ resultados possíveis.

Técnicas de Contagem

- Nem sempre é possível enumerar o espaço amostral e os eventos de forma directa; Nesses casos usamos a análise combinatória como processo de contagem: permutações, combinações e arranjos

Princípio básico de contagem

Dados r experimentos. Se o experimento 1 pode gerar n_1 resultados possíveis e se, para cada um desses n_1 resultados, houver n_2 resultados possíveis para o experimento 2; e se, para cada um dos resultados conjuntos de n_1 e n_2, houver n_3 resultados possíveis para experimento 3; e assim por diante, então os r experimentos possuem conjuntamente $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots \times n_r$ resultados possíveis.

Exemplo: Uma associação de uma faculdade é formado por 3 estudantes do 1º ano, 4 do 2º ano, 5 do 3º ano e 2 finalistas. Um subcomitê de 4 pessoas, formado por uma pessoa de cada ano, deve ser escolhido. Quantos subcomitês diferentes são possíveis?

Técnicas de Contagem

- Nem sempre é possível enumerar o espaço amostral e os eventos de forma directa; Nesses casos usamos a análise combinatória como processo de contagem: permutações, combinações e arranjos

Princípio básico de contagem

Dados r experimentos. Se o experimento 1 pode gerar n_1 resultados possíveis e se, para cada um desses n_1 resultados, houver n_2 resultados possíveis para o experimento 2; e se, para cada um dos resultados conjuntos de n_1 e n_2, houver n_3 resultados possíveis para experimento 3; e assim por diante, então os r experimentos possuem conjuntamente $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots \times n_r$ resultados possíveis.

Exemplo: Uma associação de uma faculdade é formado por 3 estudantes do 1º ano, 4 do 2º ano, 5 do 3º ano e 2 finalistas. Um subcomitê de 4 pessoas, formado por uma pessoa de cada ano, deve ser escolhido. Quantos subcomitês diferentes são possíveis?

Resposta: Do princípio de contagem, podemos formar $3 \times 4 \times 5 \times 2 = 120$ subcomitês possíveis. ■

Permutações simples

i) PERMUTAÇÕES

Seja A um conjunto com n elementos distintos. Os agrupamentos ordenados (diferem pela ordem) dos elementos de A são denominados permutações simples. Denotamos por P_n o nº de permutações simples de n elementos de A:

$$P_n = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1 = n!$$

onde, $n!$ denota o factorial de n; Por convenção, $0! = 1$.

Exemplo: De quantas maneiras uma família de 5 pessoas pode sentar-se num banco de 5 lugares para tirar uma foto?

i) PERMUTAÇÕES

Seja A um conjunto com n elementos distintos. Os agrupamentos ordenados (diferem pela ordem) dos elementos de A são denominados permutações simples. Denotamos por P_n o nº de permutações simples de n elementos de A:

$$P_n = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1 = n!$$

onde, $n!$ denota o factorial de n; Por convenção, $0! = 1$.

Exemplo: De quantas maneiras uma família de 5 pessoas pode sentar-se num banco de 5 lugares para tirar uma foto?

Resposta: O 1º lugar pode ser ocupado por qualquer uma das 5 pessoas. Feito isto, restam 4 possibilidades para o 2º lugar. Em seguida, há 3 possibilidades para o 3º lugar, 2 possibilidades para o 4º lugar, e finalmente 1 possibilidade para o 5º lugar. e assim sucessivamente. Portanto, as possibilidades são em número de $P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$. ■

Permutações de elementos similares

O número de permutações de $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_r$ elementos dos quais n_1 são de um tipo (parecidos), n_2 são de um segundo tipo, ..., e n_r são de $r-$ésimo tipo é selecionados de um conjunto de n elementos distintos é:

$$\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\ldots n_r!}$$

Exemplo 1: Um torneio de xadrez tem 10 competidores, dos quais 4 são russos, 3 são canadenses, 2 são ingleses e um é brasileiro. Se o resultado do torneio listar apenas a nacionalidade dos jogadores em sua ordem de colocação, quantos resultados serão possíveis?

Resposta: Há $\frac{10!}{4!3!2!1!} = 12600$ resultados possíveis. ■

Permutações de elementos similares

O número de permutações de $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_r$ elementos dos quais n_1 são de um tipo (parecidos), n_2 são de um segundo tipo, ..., e n_r são de $r-$ésimo tipo é selecionados de um conjunto de n elementos distintos é:

$$\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\ldots n_r!}$$

Exemplo 1: Um torneio de xadrez tem 10 competidores, dos quais 4 são russos, 3 são canadenses, 2 são ingleses e um é brasileiro. Se o resultado do torneio listar apenas a nacionalidade dos jogadores em sua ordem de colocação, quantos resultados serão possíveis?

Resposta: Há $\frac{10!}{4!3!2!1!} = 12600$ resultados possíveis. ■

Exemplo 2: Quantos diferentes arranjos de letras podem ser formados a partir das letras PEPPER?

Resposta: Há $\frac{6!}{3!2!} = 60$ arranjos possíveis. ■

ii) COMBINAÇÕES

O nº de combinações, grupos diferentes com r elementos, que podem ser seleccionados de um conjunto de n elementos, quando a ordem da selecção não é relevante, é denotado como $C_{n,r}$, e

$$C_{n,r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}, \quad \text{para } r \leq n.$$

Por convenção, $C_{k,k} = C_{k,1} = C_{k,0} = 1 \ \forall k \in \mathbb{N}$.

Exemplo 1: Uma comissão de três pessoas deve ser formada a partir de um grupo de 10 pessoas. Quantas comissões diferentes são possíveis?

Combinações

ii) COMBINAÇÕES

O nº de combinações, grupos diferentes com r elementos, que podem ser seleccionados de um conjunto de n elementos, quando a ordem da selecção não é relevante, é denotado como $C_{n,r}$, e

$$C_{n,r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}, \quad \text{para } r \leq n.$$

Por convenção, $C_{k,k} = C_{k,1} = C_{k,0} = 1 \ \forall k \in \mathbb{N}$.

Exemplo 1: Uma comissão de três pessoas deve ser formada a partir de um grupo de 10 pessoas. Quantas comissões diferentes são possíveis?

Resposta: Há $C_{10,3} = \frac{10!}{3!7!} = 120$ comissões possíveis. ■

Exemplo 1: De um grupo de 5 mulheres e 7 homens, quantas comissões diferentes formadas por 2 mulheres e 3 homens podem ser formadas?

Combinações

ii) COMBINAÇÕES

O nº de combinações, grupos diferentes com r elementos, que podem ser seleccionados de um conjunto de n elementos, quando a ordem da selecção não é relevante, é denotado como $C_{n,r}$, e

$$C_{n,r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}, \quad \text{para } r \leq n.$$

Por convenção, $C_{k,k} = C_{k,1} = C_{k,0} = 1 \; \forall k \in \mathbb{N}$.

Exemplo 1: Uma comissão de três pessoas deve ser formada a partir de um grupo de 10 pessoas. Quantas comissões diferentes são possíveis?

Resposta: Há $C_{10,3} = \frac{10!}{3!7!} = 120$ comissões possíveis. ■

Exemplo 1: De um grupo de 5 mulheres e 7 homens, quantas comissões diferentes formadas por 2 mulheres e 3 homens podem ser formadas?

Resposta: Há $C_{5,2} = 10$ grupos possíveis de duas mulheres e $C_{7,3} = 35$ grupos possíveis de três homens. Pelo princípio básico, no total são formadas $C_{5,2} \times C_{7,3} = 350$ comissões possíveis. ■

Arranjos (ou permutações de subconjuntos)

iii) ARRANJOS

O nº de arranjos, grupos diferentes com r elementos, que podem ser seleccionados de um conjunto de n elementos, quando a ordem da selecção é relevante, é denotado como $A_{n,r}$, e

$$A_{n,r} = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Exemplo 1: Usando-se os dígitos 1, 2, 3, 4 e 5, quantos números diferentes com dois algarismos podemos formar?

Arranjos (ou permutações de subconjuntos)

iii) ARRANJOS

O nº de arranjos, grupos diferentes com r elementos, que podem ser seleccionados de um conjunto de n elementos, quando a ordem da selecção é relevante, é denotado como $A_{n,r}$, e

$$A_{n,r} = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Exemplo 1: Usando-se os dígitos 1, 2, 3, 4 e 5, quantos números diferentes com dois algarismos podemos formar?

Resposta: O 1º algarismo pode ser qualquer um dentre 5; o 2º ser pode qualquer um dentre 4 (isto é, excluindo o 1º escolhido). Então podemos formar $A_{5,2} = 5 \times 4 = \frac{5!}{3!} = 20$ números diferentes. $\blacksquare$

Arranjos (ou permutações de subconjuntos)

Exemplo 2: A Sra. Rosa possui 9 livros, dos quais 4 são de matemática, 3 são de química e 2 são de história. Ela deseja arranjá-los de forma que todos os livros que tratam do mesmo assunto permaneçam juntos na prateleira. Quantos diferentes arranjos são possíveis?

Arranjos (ou permutações de subconjuntos)

Exemplo 2: A Sra. Rosa possui 9 livros, dos quais 4 são de matemática, 3 são de química e 2 são de história. Ela deseja arranjá-los de forma que todos os livros que tratam do mesmo assunto permaneçam juntos na prateleira. Quantos diferentes arranjos são possíveis?

Resposta: Há 3! maneiras possíveis de ordenar os assuntos. E, para cada assunto, há 4! maneiras de arrumar os livros de matemática, 3! maneiras de arrumar os livros de química e 2! de arrumar os de história. Portanto, a resposta desejada é $3!4!3!2! = 1728$. ■

OBSERVAÇÃO:

- O conceito de combinações não leva em conta a ordem da seleção;
- Os arranjos levam em conta a ordem da seleção de r elementos de um conjunto de n elementos;

Definição de Probabilidade

A teoria da probabilidade oferece métodos para medir o nível de (in)certeza quanto à ocorrência de um resultado de um experimento aleatório.

- Conceito clássico (ou "a priori") de probabilidade:
  Se o evento A pode ocorrer de h maneiras diferentes, em um total de n modos possíveis, todos igualmente prováveis, então a probabilidade de A, denotada por $P(A)$ é dada por

$$P(A) = \frac{\text{nº de resultados favoráveis ao evento } A}{\text{nº de resultados possíveis do experimento}} = \frac{h}{n}$$

- Exemplo:
  - A: "sair cara no lançamento de uma moeda". Então $P(A) = \frac{1}{2}$
  - A: "ocorrer um nº par no lançamento de um dado", ou seja, $A = \{2, 4, 6\}$. Então $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
  - A: "sair pelo uma cara no lançamento de duas moedas".
    $\Omega = \{(Ca, Ca), (Ca, Co), (Co, Ca), (Co, Co)\}$;
    $A = \{(Ca, Co), (Co, Ca), (Ca, Ca)\}$. Então $P(A) = \frac{3}{4}$

Definição de Probabilidade

- Conceito frequencista o (ou "a posteriori") de probabilidade:
  Se após n repetições de um experimento, sempre sob as mesmas condições (n suficientemente grande), se observam h ocorrências do evento A, então a probabilidade de A
  $$P(A) = \lim_{n\to\infty} = \frac{h}{n}.$$
- Essa probabilidade é chamada também probabilidade empírica (frequência relativa);
- Exemplo: Se jogarmos uma moeda 1000 vezes e aparece cara 532 vezes, P(cara) é estimada em $532/1000 = 0,532$.
- OBSERVAÇÃO: Os dois conceitos apresentam sérias dificuldades:
  - ➜ o primeiro, porque a expressão "igualmente provável" é vaga;
  - ➜ o segundo, porque não sabemos para qual "n suficientemente grande" a P(A) converge para um valor, e se este será o mesmo em outras repetições do experimento.

Definição axiomática de Probabilidade

Seja Ω um espaço amostral associado a um experimento aleatório. A probabilidade de um evento $A, P(A)$, é uma função que associa a cada evento de Ω um número real, satisfazendo os seguintes axiomas:

i) $0 \leq P(A) \leq 1, \forall A \subset \Omega$;

ii) $P(\Omega) = 1$;

iii) $P\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j)$, se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são eventos mutuamente exclusivos.

Em particular, quando A_1 e A_2 são mutuamente exclusivos, então

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$$

Alguns teoremas importantes

i) Se $A_1, \dots, A_n$ formam uma partição do Ω, então $\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$

ii) Se $\emptyset$ é o evento impossível (conjunto vazio), então $P(\emptyset) = 0$;

iii) Se $\overline{A}$ é o complementar de A, então $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;

iv) Teorema da soma: Se A e B são dois eventos quaisquer, então

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Mas geralmente, se A_1, A_2 e A_3 são dois eventos quaisquer, então

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) \\ &- P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) \\ &+ P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \end{aligned}$$

v) Se A e B são dois eventos quaisquer, então

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$$

Eventos equiprováveis

- Considere o espaço amostral $\Omega = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ associado a um experimento aleatório;

- Seja $P(e_i) = p_i,\ i = 1, \ldots, n$. Então, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(e_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

- Definição: Os eventos $e_i,\ i = 1, \ldots, n$ são equiprováveis ou uniforme quando $P(e_1) = P(e_2) = \ldots = P(e_n) = p$. Por conseguinte, a probabilidade de cada um dos n pontos amostrais (eventos) é $p = \frac{1}{n}$

- Generalização: Suponha que qualquer evento $A \subset \Omega$ tenha k pontos amostrais (equiprováveis): $A = \{e_1, e_2, \ldots, e_k\}, 1 \leq k \leq n$. Então

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(e_i) = \sum_{i=1}^{k} p = k \cdot p = k \cdot \frac{1}{n}$$

$$P(A) = \frac{k}{n}$$

Eventos equiprováveis

Exemplo 1: Numa sala existem 5 rapazes com mais de 21 anos, 4 rapazes com menos de 21 anos, 6 moças com mais de 21 anos e 3 moças com menos de 21 anos. Uma pessoa é escolhida ao acaso entre as 18. Sejam os eventos:
A:"a pessoa tem mais de 21 anos"; B:"a pessoa tem menos de 21 anos";
C: "a pessoa é um rapaz"; D: "a pessoa é uma moça". Calcular:

i) $P(B \cup D)$;

ii) $P(\overline{A} \cap \overline{C})$.

iii) $P(A \cap \overline{C})$

Eventos equiprováveis

Exemplo 1: Numa sala existem 5 rapazes com mais de 21 anos, 4 rapazes com menos de 21 anos, 6 moças com mais de 21 anos e 3 moças com menos de 21 anos. Uma pessoa é escolhida ao acaso entre as 18. Sejam os eventos:
A:"a pessoa tem mais de 21 anos"; B:"a pessoa tem menos de 21 anos";
C: "a pessoa é um rapaz"; D: "a pessoa é uma moça". Calcular:

i) $P(B \cup D)$;

ii) $P(\overline{A} \cap \overline{C})$.

iii) $P(A \cap \overline{C})$

Resolução:

$\Omega = \{5R^+, 4R^-, 6M^+, 3M^-\} \ \therefore \ p = \frac{1}{18}$.

$A = \{5R^+, 6M^+\} \rightarrow P(A) = \frac{11}{18}$; $\quad B = \{4R^-, 3M^-\} \rightarrow P(B) = \frac{7}{18}$

$C = \{5R^+, 4R^-\} \rightarrow P(C) = \frac{9}{18}$; $\quad D = \{6M^+, 3M^-\} \rightarrow P(D) = \frac{9}{18}$

i) $P(B \cup D) = P(B) + P(D) - P(B \cap D)$;
como $B \cap D = \{3M^-\}$, temos que $P(B \cap D) = \frac{3}{18}$.

Logo: $P(B \cup D) = \frac{7}{18} + \frac{9}{18} - \frac{3}{18} = \frac{13}{18}$ ■

Eventos equiprováveis

Exemplo 1 (Continuação da resolução):

ii) $P(\overline{A} \cap \overline{C}) = ?$

$$P(\overline{A} \cap \overline{C}) = P(\overline{A \cup C}) = 1 - P(A \cup C)$$
$$= 1 - \{P(A) + P(C) - P(A \cap C)\}$$

como $A \cap C = \{5R^+\}$, temos que $P(A \cap C) = \frac{5}{18}$.

Logo: $P(\overline{A} \cap \overline{C}) = 1 - \left\{\frac{11}{18} + \frac{9}{18} - \frac{5}{18}\right\} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$ ■

Outra forma de resolver a questão:

Como $\overline{A} = B$ e $\overline{C} = D$, temos que:

$\overline{A} \cap \overline{C} = B \cap D = \{3M^-\}$. Então

$P(\overline{A} \cap \overline{C}) = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$ ■

iii) $P(A \cap \overline{C}) = ?$ ($A \cap \overline{C}$="A pessoa ter mais de 21 anos e não ser rapaz")

$$P(A \cap \overline{C}) = P(A) - P(A \cap C) = \frac{11}{18} - \frac{5}{18} = \frac{6}{18} \quad ■$$

É fácil notar que $A \cap \overline{C} = M^+$

Eventos equiprováveis

Exemplo 2: A rota usada por 280 motoristas que vão ao trabalho contém dois cruzamentos com semáforos. Sabe-se que, deste grupo, 112 param no primeiro semáforo (A), metade para no segundo semáforo (B) e 168 param em pelo menos um dos dois semáforos. Um motorista é escolhido ao acaso neste grupo. Qual é a probabilidade de ele ter de parar:

i) Nos dois semáforos (em ambos)?
ii) No Segundo semáforo mas não no primeiro?
iii) Somente em um dos semáforos?

Eventos equiprováveis

Exemplo 2: A rota usada por 280 motoristas que vão ao trabalho contém dois cruzamentos com semáforos. Sabe-se que, deste grupo, 112 param no primeiro semáforo (A), metade para no segundo semáforo (B) e 168 param em pelo menos um dos dois semáforos. Um motorista é escolhido ao acaso neste grupo. Qual é a probabilidade de ele ter de parar:

i) Nos dois semáforos (em ambos)?

ii) No Segundo semáforo mas não no primeiro?

iii) Somente em um dos semáforos?

Resposta: Sejam os eventos:

- $A =$"O motorista parar no 1º semáforo"$\rightarrow P(A) = \frac{112}{280} = 0,4$;
- $B =$"Parar no 2º semáforo"$\rightarrow P(B) = \frac{140}{280} = 0,5$; $P(A \cup B) = \frac{168}{280} = 0,6$

i) $P(A \cap B) =?$, usando a fórmula $\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$, obtém-se, $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,4 + 0,5 - 0,6 = 0,3$ ■

ii) $P(\bar{A} \cap B) = P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = 0,5 - 0,3 = 0,2$ ■

iii) Sejam os eventos $X = \bar{A} \cap B$ e $Y = A \cap \bar{B}$ (mutuamente exclusivos, prove!!) $P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) = (0,5 - 0,3) + (0,4 - 0,3) = 0,3$ ■

Eventos equiprováveis

Exemplo 3: Em um congresso científico existem 15 matemáticos e 12 estatísticos. Qual a probabilidade de se formar uma comissão com 5 membros, na qual figurem 3 matemáticos e 2 estatísticos?

Exemplo 3: Em um congresso científico existem 15 matemáticos e 12 estatísticos. Qual a probabilidade de se formar uma comissão com 5 membros, na qual figurem 3 matemáticos e 2 estatísticos?

Resposta:

- Espaço amostral-Ω: "Todos as comissões de 5 membros seleccionados dentre 27", $\#\Omega = C_{27,5}$
- Evento A: "comissão de 3 matemáticos e 2 estatísticos", ou seja, $\#A = C_{15,3} \times C_{12,2}$
- $P(A) = \frac{C_{15,3} \times C_{12,2}}{C_{27,5}}$ ■

Eventos equiprováveis

Exemplo 3: Duas bolas vão ser retiradas de uma urna que contém 2 bolas brancas, 3 pretas e 4 verdes. Qual a probabilidade de que ambas

i) sejam verdes?

ii) sejam da mesma cor?

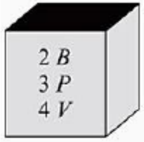
Eventos equiprováveis

Exemplo 3: Duas bolas vão ser retiradas de uma urna que contém 2 bolas brancas, 3 pretas e 4 verdes. Qual a probabilidade de que ambas

i) sejam verdes?

ii) sejam da mesma cor?

Resposta:



Ω: "Todos os pares de bolas selecionadas dentre 9", $\#\Omega = C_{9,2} = 36$

i) A: "ambas as bolas serem verdes", $\#A = C_{4,2} \times C_{2,0} \times C_{3,0} = 6$;

$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. ■

ii) B: "ambas as bolas serem da mesma cor", ou seja, ambas verdes ($C_{4,2} = 6$) ou ambas pretas ($C_{3,2} = 3$) ou ambas brancas ($C_{2,2} = 1$). Portanto, $P(B) = \frac{6+3+1}{36} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$. ■

Probabilidade condicional

Sejam $A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$. A probabilidade condicional de que A ocorra, sabendo que B ocorreu, é representada por $P(A|B)$ (leia-se probabilidade de A dado B) e

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0.$$

Exemplo 1: Probabilidade condicional no lançamento de um dado

Experimento: Lançamento de um dado; $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
A = "o resultado é um nº ímpar"; ou seja, $A = \{1, 3, 5\}$
B = "ocorrer um nº maior ou igual 2"; ou seja, $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$
Pede-se para calcular $P(A|B)$.

- 1ª alternativa de solução: Considerando um espaço amostral "reduzido": $\Omega_R = B$. Portanto, $P(A|B) = \frac{2}{5}$ $\blacksquare$.

- 2ª alternativa de solução: Usando a definição (Ω original):
  $A \cap B$=\{3,5\}; $P(A \cap B) = \frac{2}{6}$; $P(B) = \frac{5}{6}$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2/6}{5/6} = \frac{2}{5} \blacksquare$$

Probabilidade condicional

Exemplo 2: Consideremos a distribuição de 250 alunos que cursam o primeiro ano de uma faculdade. Destes alunos, 100 são homens (H) e 150 são mulheres (M); 110 cursam física (F) e 140 química (Q).

Sexo	Disciplina		Total
	F	Q	
H	40	60	100
M	70	80	150
Total	110	140	250

Um aluno é sorteado ao acaso. Qual a probabilidade de que esteja cursando química, dado que é mulher?

- 1ª alternativa de solução: Consideramos os alunos que cursam química dentre as mulheres: $P(Q|M) = \frac{80}{150}$ ■

- 2ª alternativa de solução: Usando a definição (Ω original): $P(Q \cap M) = \frac{80}{250}$; $P(M) = \frac{150}{250}$

$$P(Q|M) = \frac{P(Q \cap M)}{P(M)} = \frac{\frac{80}{250}}{\frac{150}{250}} = \frac{80}{150} \blacksquare$$

Eventos independentes

Definição: Sejam $A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$. A e B são eventos independentes se qualquer uma das seguintes afirmações for verdadeira:

1) $P(A|B) = P(A)$
2) $P(B|A) = P(B)$
3) $\boxed{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)}$

Eventos independentes

Definição: Sejam $A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$. A e B são eventos independentes se qualquer uma das seguintes afirmações for verdadeira:

1) $P(A|B) = P(A)$
2) $P(B|A) = P(B)$
3) $\boxed{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)}$

Exemplo: A probabilidade de que um homem esteja vivo daqui a 30 anos é de $2/5$; a de sua mulher é de $2/3$. Calcule a probabilidade de que daqui a 30 anos:

i) ambos estejam vivos;
ii) somente o homem esteja vivo;
iii) somente a mulher esteja viva;
iv) nenhum deles esteja vivo;
v) pelo menos um esteja vivo.

Resposta: Consideremos os eventos:

H: o homem estará vivo daqui a 30 anos; $P(H) = 2/5 \therefore P(\overline{H}) = 1/5$
M: a mulher estará viva daqui a 30 anos; $P(M) = 2/3 \therefore P(\overline{M}) = 1/3$

Obs. Intuitivamente, H e M podem ser considerados independentes.

Eventos independentes

Resposta (continuação):

$P(H) = \frac{2}{5} \therefore P(\overline{H}) = \frac{3}{5}$

$P(M) = \frac{2}{3} \therefore P(\overline{M}) = \frac{1}{3}$

i) ambos estejam vivos;

$$P(H \cap M) = P(H) \times P(M) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{15} \quad \blacksquare$$

Eventos independentes

Resposta (continuação):

$P(H) = \frac{2}{5} \therefore P(\overline{H}) = \frac{3}{5}$

$P(M) = \frac{2}{3} \therefore P(\overline{M}) = \frac{1}{3}$

i) ambos estejam vivos;

$$P(H \cap M) = P(H) \times P(M) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{15} \quad \blacksquare$$

ii) somente o homem esteja vivo;

$$P(H \cap \overline{M}) = P(H) \times P(\overline{M}) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{15} \quad \blacksquare$$

Eventos independentes

Resposta (continuação):

$P(H) = \frac{2}{5} \therefore P(\overline{H}) = \frac{3}{5}$
$P(M) = \frac{2}{3} \therefore P(\overline{M}) = \frac{1}{3}$

i) ambos estejam vivos;

$$P(H \cap M) = P(H) \times P(M) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{15} \quad \blacksquare$$

ii) somente o homem esteja vivo;

$$P(H \cap \overline{M}) = P(H) \times P(\overline{M}) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{15} \quad \blacksquare$$

iii) somente a mulher esteja viva;

$$P(\overline{H} \cap M) = P(\overline{H}) \times P(M) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{5}$$

Eventos independentes

Resposta (continuação):

$P(H) = \frac{2}{5} \therefore P(\overline{H}) = \frac{3}{5}$
$P(M) = \frac{2}{3} \therefore P(\overline{M}) = \frac{1}{3}$

i) ambos estejam vivos;

$$P(H \cap M) = P(H) \times P(M) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{15} \quad \blacksquare$$

ii) somente o homem esteja vivo;

$$P(H \cap \overline{M}) = P(H) \times P(\overline{M}) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{15} \quad \blacksquare$$

iii) somente a mulher esteja viva;

$$P(\overline{H} \cap M) = P(\overline{H}) \times P(M) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{5}$$

iv) nenhuma esteja vivo;

$$P(\overline{H} \cap \overline{M}) = P(\overline{H}) \times P(\overline{M}) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{5} \quad \blacksquare$$

Eventos independentes

Resposta (continuação):

$P(H) = \frac{2}{5} \therefore P(\overline{H}) = \frac{3}{5}$

$P(M) = \frac{2}{3} \therefore P(\overline{M}) = \frac{1}{3}$

i) ambos estejam vivos;

$$P(H \cap M) = P(H) \times P(M) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{15} \quad \blacksquare$$

ii) somente o homem esteja vivo;

$$P(H \cap \overline{M}) = P(H) \times P(\overline{M}) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{15} \quad \blacksquare$$

iii) somente a mulher esteja viva;

$$P(\overline{H} \cap M) = P(\overline{H}) \times P(M) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{5}$$

iv) nenhuma esteja vivo;

$$P(\overline{H} \cap \overline{M}) = P(\overline{H}) \times P(\overline{M}) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{5} \quad \blacksquare$$

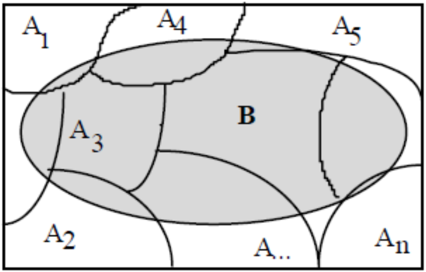
v) pelo menos um esteja vivo.

$$P(H \cup M) = P(H) + P(M) - P(H \cap M) = \frac{2}{5} + \frac{2}{3} - \frac{4}{15} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5} \quad \blacksquare$$

Teorema da Probabilidade Total

Partição do espaço amostral: Dizemos que os eventos $A_1, A_2, \ldots, A_m$ formam uma partição do espaço amostral Ω se:

- $P(A_i) > 0$, para todo $i, i = 1, 2, \ldots, m$
- $P(A_i \cap A_j) = 0$, se $i \neq j$, ou seja, A_i e A_j são mutuamente exclusivos;
- $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m) = 1$, ou seja, $A_1, A_2, \ldots, A_m$ são eventos exaustivos;



Teorema da Probabilidade Total

Teorema da Probabilidade Total

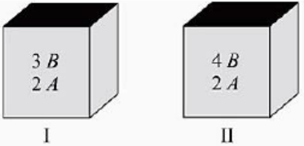
Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_m$ eventos que formam uma partição do Ω. Seja B um evento qualquer desse espaço. Então

$$\begin{aligned}
P(B) &= P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots + P(B \cap A_m) \\
&= P(B|A_1) \cdot P(A_1) + P(B|A_2) \cdot P(A_2) + \ldots + P(B|A_m) \cdot P(A_m) \\
&= \sum_{i=1}^{m} P(B|A_i) \cdot P(A_i)
\end{aligned}$$

Teorema da Probabilidade Total

Exemplo: Uma urna contém 3 bolas brancas e 2 amarelas. Uma segunda uma contém 4 bolas brancas e 2 amarelas. Escolhe-se, ao acaso, uma urna e dela retira-se, também ao acaso, uma bola. Qual a probabilidade de que seja branca?

Resposta:



$P(I) = \frac{1}{2}$; $\quad P(B|I) = \frac{3}{5}$ $\quad P(II) = \frac{1}{2}$; $\quad P(B|II) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$$B = (B \cap I) \cup (B \cap II)$$
$$P(B) = P(B \cap I) + P(B \cap II)$$
$$P(B) = P(I) \cdot P(B|I) + P(II) \cdot P(B|II) \therefore$$
$$P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{19}{30} \blacksquare$$

Teorema de Bayes

Teorema de Bayes

Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_m$ eventos que formam uma partição do Ω. Seja $B \subset \Omega$. Sejam conhecidas $P(A_i)$ e $P(B|A_i)$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Então

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{P(B)}.$$

Recorrendo ao Teorema da probabilidade total, tem-se que $P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{m} P(B|A_i) \cdot P(A_i)}$.

Observação: No teorema de Bayes

- $P(A_i)$ são chamadas probabilidades à priori;
- $P(A_i|B)$ são chamadas probabilidades à posteriori;

Teorema de Bayes

Exemplo 1: Em certo colégio, 5% dos homens e 2% das mulheres têm mais do que $1,80m$ de altura. Por outro lado, 60% dos estudantes são homens. Se um estudante é selecionado aleatoriamente e tem mais de $1,80m$ de altura, qual a probabilidade de que o estudante seja mulher?

Teorema de Bayes

Exemplo 1: Em certo colégio, 5% dos homens e 2% das mulheres têm mais do que $1,80m$ de altura. Por outro lado, 60% dos estudantes são homens. Se um estudante é selecionado aleatoriamente e tem mais de $1,80m$ de altura, qual a probabilidade de que o estudante seja mulher?

Resposta: sejam os eventos:

M : "ser mulher"; $P(M) = 0,4$; H : "ser homem"; $P(H) = 0,6$

A : "ter mais do que $1,8m$; $P(A|H) = 0,05$ $P(A|M) = 0,02$

$P(M|A) = ?$

- Calculando $P(A)$ pelo teorema de probabilidade total.

$$P(A) = P(A|M) \cdot P(M) + P(A|H) \cdot P(H) = 0,02 \times 0,4 + 0,05 \times 0,6 = 0,038$$

- Calculando $P(M|A)$ pelo teorema de Bayes.

$$P(M|A) = \frac{P(A|M) \cdot P(M)}{P(A)} = \frac{0,02 \times 0,4}{0,038}$$
$$\frac{0,008}{0,038} = 0,21 = 21\% \blacksquare$$

Teorema de Bayes

Exemplo 2: Num escritório existem três impressoras A, B, e C, que imprimem a velocidades diferentes. Os ficheiros são enviados para a primeira impressora que estiver disponível. A probabilidade de um ficheiro ser enviado para as impressoras A, B ou C é respectivamente $0,6$, $0,3$ e $0,1$. Ocasionalmente a impressora avaria e destrói a impressão. As impressoras A, B e C avariam com probabilidades $0,01$, $0,05$ e $0,04$. A impressão do seu ficheiro foi destruída. Qual a probabilidade de ter sido enviada para impressora A?

Teorema de Bayes

Exemplo 2: Num escritório existem três impressoras A, B, e C, que imprimem a velocidades diferentes. Os ficheiros são enviados para a primeira impressora que estiver disponível. A probabilidade de um ficheiro ser enviado para as impressoras A, B ou C é respectivamente $0,6$, $0,3$ e $0,1$. Ocasionalmente a impressora avaria e destrói a impressão. As impressoras A, B e C avariam com probabilidades $0,01$, $0,05$ e $0,04$. A impressão do seu ficheiro foi destruída. Qual a probabilidade de ter sido enviada para impressora A?

Resposta: Vamos considerar a seguinte anotação:

A : "enviar para impressora A"; $P(A) = 0,60$;

B : "enviar para impressora B'; $P(B) = 0,30$

C : "enviar para impressora C"; $P(B) = 0,10$;

D : "impressão destruída';

$P(D|A) = 0,01, \quad P(D|B) = 0,05, \quad P(D|C) = 0,04$;

$P(A|D) = ?$.

Resolução do Exemplo 2 (continuação):

- Calculando $P(D)$ pelo teorema de probabilidade total.

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D|A)\cdot P(A) + P(D|B)\cdot P(B) + P(D|C)\cdot P(C) \\ &= 0,01 \times 0,60 + 0,05 \times 0,30 + 0,04 \times 0,10 = 0,025 \end{aligned}$$

- Calculando $P(A|D)$ pelo teorema de Bayes.

$$\begin{aligned} P(A|D) &= \frac{P(D|A)\cdot P(A)}{P(D)} = \frac{0,01 \times 0,6}{0,025} \\ &= \frac{0,006}{0,025} = 0,24. \ \blacksquare \end{aligned}$$

- E $P(C|D) = ?$

$$\begin{aligned} P(C|D) &= \frac{P(D|C)\cdot P(C)}{P(D)} = \frac{0,04 \times 0,1}{0,025} \\ &= \frac{0,004}{0,025} = 0,16. \ \blacksquare \end{aligned}$$