Estatística Aplicada a Recursos Hídricos

Docente: Rachid Muleia

rachid.muleia@uem.mz

Mestrado em Gestão de Recursos Hídricos - DGEO/UEM

Tema: Inferência Estatística: Teste de Hipóteses

Ano lectivo: 2023

Teste de Hipóteses: Introdução

- Quando se pretende estimar um parâmetro da população a partir dos dados da amostra, pode ser feito
  - ➜ através de um único número (estimativa pontual) ou
  - ➜ por meio de um intervalo de confiança;
- No entanto, quando o objectivo é averiguar ou verificar, com base nos dados da amostra, a veracidade de uma afirmação sobre o parâmetro, a técnica estatística utilizada é chamada Teste de hipóteses;
- O teste de hipótese é um processo de decisão estatística (entre duas alternativas).

Hipóteses e procedimentos de teste

- Uma hipótese estatística, ou simplesmente hipótese, é a alegação ou afirmação sobre o valor do parâmetro da população. Por exemplo:
  - ➜ os relógios da marca A tem vida média $\mu = \mu_0$;
  - ➜ o equipamento A produz peças corn variabilidade menor que a do equipamento B: $\sigma_A^2 = \sigma_B^2$;
- No teste de hipóteses, são formuladas duas hipóteses básicas:
  - ➜ A Hipótese nula, representada por H_0, é a alegação inicialmente assumida como verdadeira.
  - ➜ A Hipótese alternativa, representada por H_1, é a afirmação contraditória a H_0.
- H_0 será rejeitada em favor de H_1 se e somente se a evidência da amostra sugerir que H_0 seja falsa;
- Se a amostra não contradisser fortemente H_0, continua-se acreditando na verdade de H_0, que não será rejeitada.

Hipóteses e procedimentos de teste

- Um teste de hipóteses é um método para usar os dados da amostra para decidir se a hipótese nula deve ser ou não desprezada.

- Em tratamento do teste de hipóteses, por conveniência técnica, H_0 sempre será definida como uma expressão de igualdade.

  Hipóteses genéricas que englobam a maioria dos casos:

$$1.(\text{Para testes bilaterais}) \begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0, \\ H_1 : \theta \neq \theta_0, \end{cases}$$

$$2.(\text{Para testes unilaterais à direita}) \begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0, \\ H_1 : \theta > \theta_0, \end{cases}$$

$$3.(\text{Para testes unilaterais à esquerda}) \begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0, \\ H_1 : \theta < \theta_0, \end{cases}$$

- O número θ_0 que aparece em H_0 e H_1 é chamado o valor nulo do parâmetro.

O procedimento padrão de um teste de hipóteses

- definem-se as hipóteses do teste: H_0 e H_1;
- fixa-se um nível de significância α;
- levanta-se uma amostra de tamanho n e calcula-se uma estimativa $\hat{\theta}_0$ do parâmetro θ;
- usa-se para cada tipo de teste uma variável cuja distribuição amostral do $\hat{\theta}_0$ seja a mais concentrada em torno do θ;
- Com o valor dado em H_0, calcula-se a estatística do teste, uma função dos dados da amostra na qual a decisão se baseia. O valor da estatística é chamado o valor estatístico calculado (V_{calc}).
- fixam-se a região de não rejeição (RNR) de H_0 e a região de rejeição de H_0 ou região crítica (RC) para o valor calculado ao nível α.
- A H_0 será então rejeitada se, e somente se, o valor estatístico observado $V_{calc} \in$ região crítica. Caso contrário, a decisão será a de não rejeitar H_0.

Teste de Hipóteses para μ de populações normais com σ^2 conhecidas

i) Testes Bilaterais

Exemplo 1 Um pesquisador deseja estudar o efeito de certa substância no tempo de reacção de seres vivos a um certo tipo de estímulo. Um experimento é desenvolvido com cobaias que são inoculadas com a substância e submetidas a um estímulo eléctrico, com seus tempos de reacção (em segundos) anotados: $9,1$; $9,3$; $7,2$; $7,5$; $13,3$; $10,9$; $7,2$; $9,9$; $8,0$; $8,6$. Admite-se que o tempo de reacção segue, em geral, o modelo Normal com média 8 e desvio padrão $\sigma = 2$ segundos. O pesquisador desconfia, entretanto, que o tempo médio sofre alteração por influência da substância. Neste caso, as hipóteses de interesse são:

H_0 :as cobaias apresentam tempo de reação padrão;

H_1 :as cobaias têm o tempo de reação alterado.

Em termos estatísticos, tais hipóteses envolvem o parâmetro μ:

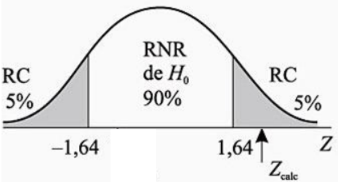
$$H_0 : \mu = 8,0;$$
$$H_1 : \mu \neq 8,0.$$

Pede-se para testar as hipóteses ao nível de significância de 10%.

Teste de Hipóteses para μ de populações normais com σ^2 conhecidas

Resolução: As hipóteses já estão definidas. O tamanho da amostra $n = 10$, e a estimativa de média é $\bar{x}_{obs} = \frac{9{,}1+9{,}3+\ldots+8{,}6}{10} = 9,1$

- Uma vez que o teste envolve a média de uma população normal com σ^2 conhecida, usaremos a v.a. $Z \sim N(0,1)$ para obter a estatística do teste;
- temos que $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{4}{10}\right)$, $Z = \frac{\bar{x}-\mu_{H_0}}{\sigma_{\bar{x}}}$, $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{10}} = 0,632$
- Sendo que $\mu_{H_0} = 8,0$, temos $Z_{calc} = \frac{9{,}1-8{,}0}{0{,}632} = 1,74$
- Como o teste é bilateral e $\alpha = 10\%$, a região de não rejeição (RNR) é: $P(|Z| < z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 0,90$, então $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1,64$.



Teste de Hipóteses para μ de populações normais com σ^2 conhecidas

- Decisão: Como $Z_{calc} \in RC$, logo a decisão é rejeitar H_0.
- Conclusão: Com base nessa amostra, ao nível de significância de 10%, há evidências suficientes para afirmar que o tempo de reacção das cobaias submetidas à substância fica alterado.

Outro método: Poderíamos fazer o teste de hipóteses usando IC, como se segue:

$$\begin{aligned}
\text{RNR} \rightarrow & P(\mu_{H_0} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma_{\bar{x}} < \bar{x} < \mu_{H_0} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma_{\bar{x}}) = 1 - \alpha \\
& \text{ou } P(\bar{x}_1 < \bar{x} < \bar{x}_2) = 1 - \alpha \\
\text{RC} \rightarrow & P(\bar{x} \leq \bar{x}_1 \text{ ou } \bar{x} \geq \bar{x}_2) = \alpha \\
\bar{x}_1 = & 8,0 - 1,64 \cdot 0,632 = 6,694 \quad \text{e} \quad \bar{x}_1 = 8,0 + 1,64 \cdot 0,632 = 9,036 \\
RNR = & (6,694; 9,036) \\
RC = & (-\infty; 6,694] \cup [9,036; +\infty)
\end{aligned}$$

Como $\bar{x} = 9,1$, $\bar{x} \in RC$, ou seja, rejeita-se H_0 também.

Teste de Hipóteses para μ de populações normais com σ^2 conhecidas

ii) Teste unilateral à esquerda

Exemplo 2: uma fábrica anuncia que o índice de nicotina dos cigarros da marca X apresenta-se abaixo de 26 mg por cigarro. Um laboratório realiza 10 análises do índice obtendo: $26, 24, 23, 22, 28, 25, 27, 26, 28, 24$. Sabe-se que o índice de nicotina dos cigarros da marca X se distribui normalmente com variância $5,36\ mg^2$. Pode-se aceitar a afirmação do fabricante, ao nível de 5%?

Teste de Hipóteses para μ de populações normais com σ^2 conhecidas

ii) Teste unilateral à esquerda

Exemplo 2: uma fábrica anuncia que o índice de nicotina dos cigarros da marca X apresenta-se abaixo de 26 mg por cigarro. Um laboratório realiza 10 análises do índice obtendo: $26, 24, 23, 22, 28, 25, 27, 26, 28, 24$. Sabe-se que o índice de nicotina dos cigarros da marca X se distribui normalmente com variância $5,36\ mg^2$. Pode-se aceitar a afirmação do fabricante, ao nível de 5%?

Resolução:

$$H_0 : \mu = 26;$$

$$H_1 : \mu < 26.$$

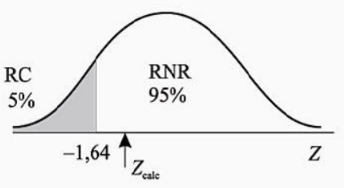
$$\alpha = 5\%; n = 10; \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} = \frac{253}{10} = 25,3; \sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{5,36}{10}} = 0,73;$$

$$Z_{calc} = \frac{25,3 - 26}{0,73} = -0,959.$$

Teste de Hipóteses para μ de populações normais com σ^2 conhecidas

Resolução (cont.):

$$\begin{aligned} z_{1-\alpha} &= 1,64 \\ RNR &= (1,64; +\infty) \\ RC &= (-\infty; -1,64] \end{aligned}$$



Como $Z_{calc} \in RNR$, então, a decisão é não rejeitar H_0, isto é, ao nível de 5% podemos concluir que a afirmação do fabricante é falsa.

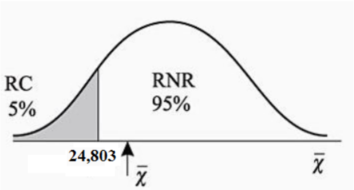
Teste de Hipóteses para μ de populações normais com σ^2 conhecidas

Resolução por intervalo de confiança:

$$RNR \rightarrow P(\bar{x} > \mu_{H_0} - z_{1-\alpha} \cdot \sigma_{\bar{x}}) = P(\bar{x} > 26 - 1,64 \cdot 0,73) = 0,95$$
$$RC \rightarrow P(\bar{x} \leq \mu_{H_0} - z_{1-\alpha} \cdot \sigma_{\bar{x}}) = P(\bar{x} \leq 26 - 1,64 \cdot 0,73) = 0,05$$

Portanto

$$RNR = (24,803; +\infty)$$
$$RC = (-\infty; 24,803]$$



Como $\bar{x} = 25,3 \in RNR$, a decisão também é não rejeitar H_0

Teste de Hipóteses para μ de populações normais com σ^2 conhecidas

iii) Teste unilateral à direita

Exemplo 3: Um fabricante de tijolos de cerâmica introduz um novo material em sua fabricação e acredita que aumentará a resistência média, que é de 206 kg. A resistência dos tijolos tem distribuição normal com desvio padrão de 12 kg. Retira-se uma amostra de 30 tijolos, obtendo $\bar{x} = 210\ kg$. Ao nível de 10%, pode o fabricante aceitar que a resistência média de seus tijolos tenha aumentado?

Teste de Hipóteses para μ de populações normais com σ^2 conhecidas

iii) Teste unilateral à direita

Exemplo 3: Um fabricante de tijolos de cerâmica introduz um novo material em sua fabricação e acredita que aumentará a resistência média, que é de 206 kg. A resistência dos tijolos tem distribuição normal com desvio padrão de 12 kg. Retira-se uma amostra de 30 tijolos, obtendo $\bar{x} = 210$ kg. Ao nível de 10%, pode o fabricante aceitar que a resistência média de seus tijolos tenha aumentado?

Resolução:

$$H_0 : \mu = 206;$$

$$H_1 : \mu < 206.$$

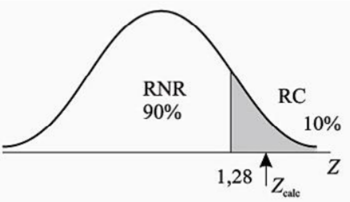
$$\alpha = 5\%; n = 10; \bar{x} = 210; \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{12}{\sqrt{30}} = 2,19;$$

$$Z_{calc} = \frac{210 - 206}{2,19} = 1,827.$$

Teste de Hipóteses para μ de populações normais com σ^2 conhecidas

Resolução (cont.):

$$
\begin{aligned}
z_{1-\alpha} &= 1,28 \\
RC &= [1,28; +\infty) \\
RNR &= (-\infty; 1,28)
\end{aligned}
$$



Como $Z_{calc} > Z_{1-\alpha}$, então, a decisão é rejeitar H_0, isto é, ao nível de 10%, o fabricante pode concluir que a resistência média de seus tijolos aumentou.

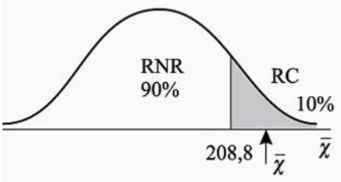
Teste de Hipóteses para μ de populações normais com σ^2 conhecidas

Resolução por intervalo de confiança:

$$RNR \rightarrow P(\bar{x} < \mu_{H_0} + z_{1-\alpha} \cdot \sigma_{\bar{x}}) = P(\bar{x} < 206 + 1,28 \cdot 2,19) = 0,90$$
$$RC \rightarrow P(\bar{x} \geq \mu_{H_0} + z_{1-\alpha} \cdot \sigma_{\bar{x}}) = P(\bar{x} \geq 206 + 1,28 \cdot 2,19) = 0,10$$

Portanto

$$RNR = (-\infty; 208,8)$$
$$RC = [208,8; +\infty)$$



Como $\bar{x} = 210 \in RC$, a decisão também é rejeitar H_0 a 10%.

Teste de Hipóteses para proporções

Procedimento:

1) Fixam-se as hipóteses $H_0 : p = p_0$ e $H_1 : p \neq p_0, p > p_0, p < p_0$;
2) Fixa-se o nível α;
3) Retira-se uma amostra de tamanho n e define-se X: nº de sucesso, calculando $\hat{p}_0 = \frac{x}{n}$;
4) Determina-se com p dados por H_0, $\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{p_{H_0} \cdot q_{H_0}}{n}}$, onde $q_{H_0} = 1 - p_{H_0}$
5) Define-se como variável critério (estatística do teste): $Z = \frac{\hat{p}_0 - p_{H_0}}{\sigma_{\hat{p}}}$.
6) Definem-se as regiões RNR e RC da mesma forma anterior e, com o mesmo procedimento rejeita-se ou não H_0.

Teste de Hipóteses para proporções

Exemplo 4: Sabe-se por experiência que 5% da produção de um determinado artigo é defeituosa. Um novo empregado é contratado. Ele produz 600 peças do artigo com 82 defeituosas. Ao nível de 15%, verificar se o novo empregado produz peças com maior índice de defeitos que o existente.

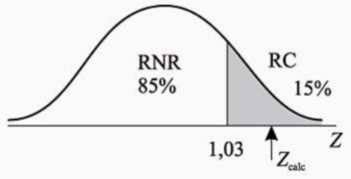
Resolução:

$$H_0 : p = 0,05;$$
$$H_1 : p > 0,05.$$
$$\alpha = 15\%;\ n = 600;\ x = 82;\ \hat{p} = \frac{82}{600} = 0,137;$$
$$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{0,05 \cdot 0,95}{600}} = 0,0089;$$
$$Z_{calc} = \frac{0,137 - 0,05}{0,0089} = 9,775.$$

Teste de Hipóteses para proporções

Resolução (cont.):

$$z_{1-\alpha} = 1,03$$
$$RC = [1,03; +\infty)$$
$$RNR = (-\infty; 1,03)$$



Como $Z_{calc} > z_{1-\alpha}$(Z crítico), $Z_{calc} \in RC$, rejeita-se H_0, isto é, ao nível de 5%, os dados observados evidenciam a fraca habilidade do novo empregado na fabricação do artigo, sendo sua proporção de defeitos superior à dos demais.

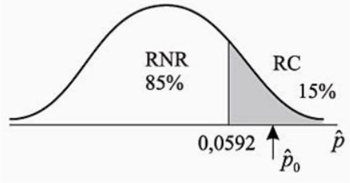
Teste de Hipóteses para proporções

Resolução por intervalo de confiança:

$$RNR \rightarrow P(\hat{p}_0 < p_{H_0} + z_{1-\alpha} \cdot \sigma_{\hat{p}}) = P(\hat{p} < 0,05 + 1,03 \cdot 0,0089) = 0,85$$
$$RC \rightarrow P(\hat{p}_0 \geq p_{H_0} + z_{1-\alpha} \cdot \sigma_{\hat{p}}) = P(\hat{p} \geq 0,05 + 1,03 \cdot 0,0089) = 0,15$$

Portanto

$$RNR = (-\infty; 0,0592)$$
$$RC = [0,0591; +\infty)$$



Como $\hat{p}_0 = 0,137 \in RC$, rejeita-se H_0 a 15%.

Erros em Testes de Hipóteses

Dois erros podem ser cometidos em um teste de hipóteses:

- Erro Tipo I: rejeitar a hipótese nula H_0 quando ela é verdadeira, e
- Erro Tipo II: não rejeitar H_0 quando ela é falsa (deveria ser rejeitada),

		Situação	
		H_0 Verdadeira	H_0 Falsa
Decisão	Rejeitar H_0	Erro Tipo I	Sem erro
	Não Rejeitar H_0	Sem erro	Erro Tipo II

- um bom procedimento é aquele para o qual a probabilidade de cometer qualquer tipo de erro é pequena.
- As probabilidades de erro tipo I, denotada por α, e de erro tipo II, denotada por β são dadas respectivamente:

$$\alpha = P(\text{erro tipo I}) = P(\text{rejeitar} H_0 | H_0 \text{ é verdadeira})$$
$$\beta = P(\text{erro tipo II}) = P(\text{não rejeitar} H_0 | H_0 \text{ é falsa})$$

Cálculo de α e β

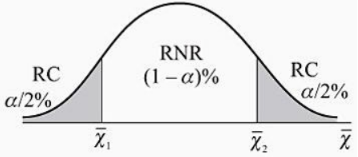
Consideremos apenas testes bilaterais para o parâmetro μ da população normal com variância conhecida, isto e:

$$\begin{cases} H_0: \ \mu = \mu_0, \\ H_1: \ \mu \neq \mu_0, \quad \text{e} \quad \sigma^2 \quad \text{conhecida.} \end{cases}$$

- Cometeremos o erro tipo I quando levantarmos uma amostra e o $\bar{x}$ cair na RC do teste, isto é:

$$\bar{x} \in (-\infty, \bar{x}_1] \cup [\bar{x}, +\infty)$$

  Se μ_0 é verdadeiro, concluímos que $P(\text{erro tipo I}) = P(\bar{x} \in RC) = \alpha$, que é o nível de significância.



- Para calcular α, μ está sempre especificado, o que não é o caso para a probabilidade do erro tipo II (β).

Cálculo de α e β

- Como H_1 é composta, existem diversos valores possíveis para μ;
- Só podemos medir a P(erro tipo II) se especificarmos como é $H_1 : \mu = \mu_1$ (hipótese simples), ou seja, β será função de μ sob H_1;
- Sabemos que não rejeitamos H_0 quando $\bar{x} \in (\bar{x}_1; \bar{x}_2)$;
- Logo, a probabilidade do erro tipo II é $P[\bar{x} \in (\bar{x}_1; \bar{x}_2)|\mu = \mu_1]$, ou seja,

$$\beta(\mu_1) = P\left\{\mu_0 - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma_{\bar{x}} \leq \bar{x} \leq \mu_0 + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma_{\bar{x}} | \mu_{\bar{x}} = \mu_1\right\}$$

Exemplo 5: para o problema de cobaias (Exemplo 1) em que $H_0 : \mu = 8,0$ e $H_1 : \mu \neq 8,0$, $n = 10$, $\bar{x}_{obs} = 9,1$ e $\alpha = 5\%$, temos $RNR = (6,694; 9,036)$. Por exemplo para $\mu_1 = 9,0$, teríamos

$$\begin{aligned}
\beta(9,0) =& P(\text{não rejeitar} H_0 | H_0 \text{ é falsa}) \\
=& P(\bar{X} \in RNR | \mu = 9,0) = P(6,694 < \bar{X} < 9,036 | \mu = 9,0) \\
=& P\left(\frac{6,694 - 9,0}{0,632} < Z < \frac{9,036 - 9,0}{0,632}\right) \\
=& P(-3,65 < Z < 0,06) = \Phi(0,06) - \Phi(-3,65) = 0,5237
\end{aligned}$$

Poder de um teste ou potência de um teste

- A função poder de um teste caracteriza o desempenho de um teste;
- fornece a probabilidade de se rejeitar uma hipótese nula H_0 falsa, $\pi(\mu_1) = P(\text{rejeitar} H_0|\mu = \mu_1)$;
- Se $\beta(\mu_1)$ é a probabilidade de se cometer um erro tipo II, $1 - \beta(\mu_1)$ é poder desse teste, isto é,

$$\pi(\mu_1) = 1 - P\left\{\mu_0 - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma_{\bar{x}} \leq \bar{x} \leq \mu_0 + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma_{\bar{x}} | \mu_{\bar{x}} = \mu_1\right\}$$

para testes bilaterais.

- A função poder depende da variável μ_1 definida em $\mathbb{R}$ e dos parâmetros (fixo em cada problema) μ_0, α e n.

Poder de um teste ou potência de um teste

Exemplo 6: De uma população normal, levantou-se uma amostra e calculou-se ao nível de 1% que $z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma_{\bar{x}} = 5$ (erro de estimação). Admitindo as hipóteses:

$$\begin{cases} H_0: \ \mu = 100 \\ H_1: \ \mu_1 = 110 \end{cases}$$

Calcule a probabilidade de se cometer erro do tipo II, isto é, de não se rejeitar H_0, sendo H_1 verdadeira, e o poder do teste.

Poder de um teste ou potência de um teste

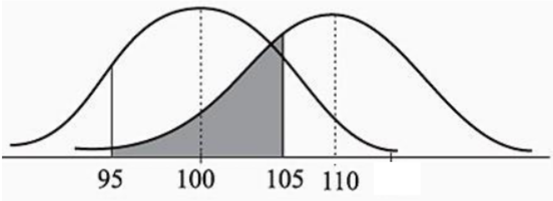
Exemplo 6: De uma população normal, levantou-se uma amostra e calculou-se ao nível de 1% que $z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma_{\bar{x}} = 5$ (erro de estimação). Admitindo as hipóteses:

$$\begin{cases} H_0: \ \mu = 100 \\ H_1: \ \mu_1 = 110 \end{cases}$$

Calcule a probabilidade de se cometer erro do tipo II, isto é, de não se rejeitar H_0, sendo H_1 verdadeira, e o poder do teste.

Resolução: Não se rejeita H_0 quando

$$\bar{x} \in (\mu_0 - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma_{\bar{x}}; \mu_0 + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma_{\bar{x}}) \rightarrow \bar{x} \in (95; 105).$$



Poder de um teste ou potência de um teste

Resolução (Cont.): Então

$$\begin{aligned}\beta(\mu_1) =& P\left\{\mu_0 - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma_{\bar{x}} \leq \bar{x} \leq \mu_0 + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma_{\bar{x}} | \mu_{\bar{x}} = \mu_1\right\} \\ =& P\{95 \leq \bar{x} \leq 105 | \mu = 110\}\end{aligned}$$

$$z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 2,57;\ \sigma_{\bar{x}} = \frac{5}{2,57} = 1,945$$

padronizando $\bar{x}$ tem-se:

$$Z_{95} = \frac{95 - 110}{1,945} = -7,71;\ Z_{105} = \frac{105 - 110}{1,945} = -2,57;$$

Logo

$$\begin{aligned}\beta(\mu_1) =& P(-7,71 \leq Z \leq -2,57) = \Phi(-2,57) - \Phi(-7,71) \\ =& 0,0051 - 0,0000 = 0,0051\end{aligned}$$

Portanto $\pi(\mu_1) = 1 - \beta(\mu_1) = 0,9949$ ou $\pi(\mu_1) = 99,49\%$.

Logo, o teste é altamente poderoso, pois a probabilidade de se rejeitar uma hipótese nula falsa é altíssima, $99,49\%$.

Poder de um teste ou potência de um teste

Exemplo 7: De uma população normal, levantou-se uma amostra de tamanho 16, obtendo-se $\bar{x} = 18$. Sabendo-se que a variância da população é 64. Admitindo as hipóteses:

$$\begin{cases} H_0: \ \mu = 20 \\ H_1: \ \mu_1 = 25 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1,64 \\ \sigma_{\bar{x}} \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \sqrt{\frac{64}{16}} = 2 \end{array}$$

calcule as probabilidade de se cometer erros do tipo I e II e o poder do teste, ao nível de 10% (use teste bilateral).

Poder de um teste ou potência de um teste

Exemplo 7: De uma população normal, levantou-se uma amostra de tamanho 16, obtendo-se $\bar{x} = 18$. Sabendo-se que a variância da população é 64. Admitindo as hipóteses:

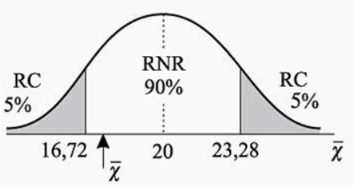
$$\begin{cases} H_0: \ \mu = 20 \\ H_1: \ \mu_1 = 25 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1,64 \\ \sigma_{\bar{x}}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \sqrt{\frac{64}{16}} = 2 \end{array}$$

calcule as probabilidade de se cometer erros do tipo I e II e o poder do teste, ao nível de 10% (use teste bilateral).

Resolução: $z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma_{\bar{x}} = 1,64 \cdot 2 = 3,28$. Não se rejeita H_0 quando

$$RNR \rightarrow \bar{x} \in (20 - 3,28; 20 + 3,28) \rightarrow \bar{x} \in (16,72; 23,28)$$

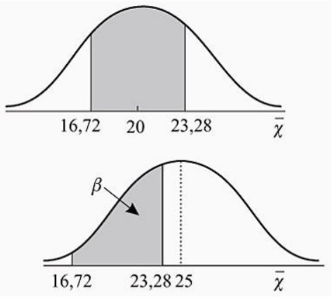
$$RC \rightarrow \bar{x} \in (-\infty; 16,72] \cup [23,28; +\infty)$$



Poder de um teste ou potência de um teste

Resolução (Cont.): Como a média amostral $\bar{x} = 18 \in RNR$, então não se rejeita H_0. Portanto P(erro tipo I)=0, pois não se rejeitou H_0 (só há possibilidade do erro tipo I quando se rejeita H_0). Por outro lado,

$$\begin{aligned}\beta(\mu_1 = 25) =& P(16,72 \leq \bar{x} \leq 23,28 | \mu = 25) \\ =& P\left(\frac{16,72 - 25}{2} \leq Z \leq \frac{23,28 - 25}{2}\right) = 0,1449\end{aligned}$$



Por conseguinte, o poder do teste é $\pi(\mu_1) = 1 - \beta(\mu_1) = 0,8551$.

Cálculo do p-valor

- Para construir a regra de decisão em um teste de hipóteses, partimos de um dado valor de α fixo.
- Uma alternativa é deixar a cargo de quem vai utilizar as conclusões do teste a escolha do valor para a probabilidade α, chamado p-valor;
- Definição (p-valor): p-valor é probabilidade de se obter estimativas mais desfavoráveis ou extremas (à luz da hipótese alternativa) do que a que está sendo fornecida pela amostra observada, supondo que a hipótese nula é verdadeira.
- Valores pequenos de p-valor evidenciam que a hipótese nula é falsa, pois a amostra fornece uma estimativa que teria probabilidade muito pequena de acontecer, se H_0 fosse verdadeira.
- O p-valor é comparado ao nível de significância α predeterminado para decidir se H_0 deve ser rejeitada.
- Se $p - valor \leq \alpha \rightarrow$ rejeitamos H_0, caso contrário, não rejeitamo-la;

Cálculo do p-valor

Inicialmente, vamos considerar o caso do teste de hipóteses unilateral. Para $H_0 : \mu = \mu_0$,

$$\text{p-valor} = P(\bar{X} < \bar{x}_{obs} | H_0 \text{ verd}) \quad \text{para} \quad H_1 : \ \mu < \mu_0$$
$$\text{p-valor} = P(\bar{X} > \bar{x}_{obs} | H_0 \text{ verd}) \quad \text{para} \quad H_1 : \ \mu > \mu_0$$

Exemplo 8: Uma associação de defesa do consumidor desconfia que embalagens de 450 gramas de um certo tipo de biscoito estão abaixo do peso. Para verificar tal afirmação, foram colectados ao acaso 80 pacotes em vários supermercados, obtendo-se uma média de peso de 447 gramas. Admitindo-se que o peso dos pacotes segue o modelo Normal com desvio padrão de 10 gramas, que conclusão pode ser tirada através do p-valor?

Cálculo do p-valor

Inicialmente, vamos considerar o caso do teste de hipóteses unilateral. Para $H_0 : \mu = \mu_0$,

$$\text{p-valor} = P(\bar{X} < \bar{x}_{obs} | H_0 \text{ verd}) \quad \text{para} \quad H_1 : \ \mu < \mu_0$$
$$\text{p-valor} = P(\bar{X} > \bar{x}_{obs} | H_0 \text{ verd}) \quad \text{para} \quad H_1 : \ \mu > \mu_0$$

Exemplo 8: Uma associação de defesa do consumidor desconfia que embalagens de 450 gramas de um certo tipo de biscoito estão abaixo do peso. Para verificar tal afirmação, foram colectados ao acaso 80 pacotes em vários supermercados, obtendo-se uma média de peso de 447 gramas. Admitindo-se que o peso dos pacotes segue o modelo Normal com desvio padrão de 10 gramas, que conclusão pode ser tirada através do p-valor?

O teste a ser executado é:

$$H_0 : \ \mu = 450 \text{ (peso médio conforme previsto na embalagem)}$$
$$H_1 : \ \mu < 450 \text{ (peso médio abaixo do previsto na embalagem)}$$

Cálculo do p-valor

Resolução (Cont.): O valor observado na amostra foi $\bar{x}_{obs} = 447$ e as suposições feitas implicam que $\bar{X} \sim N(\mu, 100/80)$. Então:

$$\begin{aligned} p - valor =& P(\bar{X} < \bar{x}_{obs}|H_0\text{verd}) = P(\bar{X} < 447|\mu = 450) \\ =& P(Z < \frac{447 - 450}{10/\sqrt{80}}) = P(Z < -2,68) = \Phi(-2,68) = 0,0037 \end{aligned}$$

- Portanto p-valor $= 0,37\%$ indica a probabilidade de que encontremos valores da estimativa mais desfavoráveis à H_0.

- Por exemplo, se o nível de significância pré-definido fosse $\alpha = 5\%$, a conclusão seria pela rejeição de H_0, uma vez que p-valor $< \alpha$

Portanto $p - valor = 0,37\%$ indica a probabilidade de que encontremos valores da estimativa mais desfavoráveis à H_0.

Cálculo do p-valor

- Para o teste de hipóteses bilateral, o cálculo de p-valor leva em conta a posição relativa entre a estimativa $\bar{x}_{obs}$ e o valor de μ_0 sob H_0
- Um procedimento usual é multiplicar por dois a probabilidade obtida em uma das caudas;
- Assim, ao testarmos $H_0: \ \mu = \mu_0$ contra $H_1: \ \mu \neq \mu_0$, a definição do p-valor depende da relação entre $\bar{x}_{obs}$ e μ_0

$$1\text{žcaso: se } \bar{x}_{obs} < \mu_0, \ \text{p-valor} = 2 \times P(\bar{X} < \bar{x}_{obs} | H_0 \text{ verd})$$
$$2\text{žcaso: se } \bar{x}_{obs} > \mu_0, \ \text{p-valor} = 2 \times P(\bar{X} > \bar{x}_{obs} | H_0 \text{ verd})$$

Desta maneira, garantimos a inclusão de valores mais extremos do estimador em relação à μ_0.

Exemplo 9: Vamos considerar o teste apresentado no Exemplo 1. As hipóteses sobre o tempo de reacção de cobaias, submetidas a um estímulo eléctrico, foram as seguintes:

$$H_0: \mu = 8,0 \text{ (tempo médio de reação sem alteração)}$$
$$H_1: \mu \neq 8,0 \text{ (tempo médio de reação alterado)}$$

Cálculo do p-valor

Resolução (Cont.): Para uma amostra de 10 cobaias, observou-se $\bar{x}_{obs} = 9,1$. Com as suposições já feitas naquele exemplo (normalidade com $\sigma = 2$ segundos), podemos obter o p-valor.

- Aqui os valores da estimativa mais desfavoráveis em relação à H_0 correspondem a região $\bar{X} > 9,1$. Assim, temos

$$
\begin{aligned}
p - valor =& 2 \times P(\bar{X} > \bar{x}_{obs} | H_0 \text{verd}) = 2 \times P(\bar{X} > 9,1 | \mu = 8) \\
=& 2 \times P\left(Z > \frac{9,1 - 8}{2/\sqrt{10}}\right) = P(Z > 1,74) \\
=& 2 \times [1 - P(Z < 1,74)] = 2 \times [1 - \Phi(1,74)] \\
=& 2 \times (1 - 0,9591) = 0,0818
\end{aligned}
$$

- Logo, se desejarmos utilizar um nível $\alpha = 0,05$, concluímos pela não rejeição da H_0.

- Ao passo que um nível $\alpha = 0,10$ nos levaria a rejeitar a hipótese H_0

Teste de hipóteses para μ de uma população normal com σ^2 desconhecida

- Se a variância σ^2 é desconhecida, o procedimento testes de hipóteses é similar ao anterior.

1) Retiramos uma amostra de n elementos da população.
   - Se $n > 30$, usa-se a distribuição normal com s^2
   - Se $n \leq 30$, usa-se a distribuição t de Student, com $gl = n - 1$ graus de liberdade
2) Calculamos as estimativas $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ e $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$
3) Determinamos $s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$ que é o estimador de $\sigma_{\bar{x}}$;
4) Ao nível de $\alpha\%$, tal como para IC $P(\bar{x} - t_{n-1,\alpha} \cdot s_{\bar{x}} < \mu < \bar{x} + t_{n-1,\alpha} \cdot s_{\bar{x}})$, fazemos:

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_1 : \mu \neq \mu_0, \mu > \mu_0, \mu < \mu_0$$

Com o $t_{n-1,\alpha}$, determinamos a RNR e RC.

Calculamos $t_{calc} = \frac{\bar{x} - \mu_{H_0}}{s_{\bar{x}}}$:

Teste de hipóteses para μ de uma população normal com σ^2 desconhecida

- se $t_{calc} \in RNR \rightarrow não se rejeita H_0$.
- se $t_{calc} \in RC \rightarrow rejeita - se H_0$.

Exemplo 10: A vida média das lâmpadas eléctricas produzidas por uma empresa era de 1.120 horas. Uma amostra de 8 lâmpadas extraída recentemente apresentou a vida média de 1.070 horas, com desvio padrão de 125 horas e distribuição normal para a vida útil. Teste a hipótese de que a vida média das lâmpadas não se alterou ao nível de 1%.

Teste de hipóteses para μ de uma população normal com σ^2 desconhecida

- se $t_{calc} \in RNR \rightarrow não se rejeita H_0$.
- se $t_{calc} \in RC \rightarrow rejeita - se H_0$.

Exemplo 10: A vida média das lâmpadas eléctricas produzidas por uma empresa era de 1.120 horas. Uma amostra de 8 lâmpadas extraída recentemente apresentou a vida média de 1.070 horas, com desvio padrão de 125 horas e distribuição normal para a vida útil. Teste a hipótese de que a vida média das lâmpadas não se alterou ao nível de 1%.

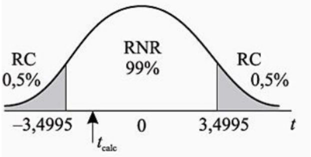
Resolução: Para verificar se houve alteração, conduz-se um teste bilateral:

$$H_0 : \mu = 1120 \qquad t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} = t_{7;0,5\%} = 3,499$$

$$H_1 : \mu \neq 1120 \qquad s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{125}{\sqrt{8}} = 44,194$$

$$t_{calc} = \frac{\bar{x} - \mu_{H_0}}{s_{\bar{x}}} = \frac{1.070 - 1120}{44,194} = -1,131$$

Teste de hipóteses para μ de uma população normal com σ^2 desconhecida



Como $t_{calc} \in RNR$, não se rejeita H_0. Conclui-se que ao nível de 1% a amostra não evidencia uma alteração significativa na vida média das lâmpadas.

Outra forma de Resolução do Exemplo 10:

$$RNR \rightarrow P(\mu_{H_0} - t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \cdot s_{\bar{x}} < \bar{x} < \mu_{H_0} + t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \cdot s_{\bar{x}}) = 1 - \alpha$$

$$RNR \rightarrow P(1120 - 3,499 \cdot 44,194 < \bar{x} < 1120 + 3,499 \cdot 44,194) = 0,99$$

$$RNR \rightarrow \bar{x} \in (965,343; 1274,657)$$

$$RC \rightarrow \bar{x} \in (-\infty; 965,343] \cup [1274,657; +\infty)$$

Como $\bar{x} = 1070 \in RNR \rightarrow$ não se rejeita H_0.

Teste de hipóteses para μ de uma população normal com σ^2 desconhecida

Exemplo 11: Uma máquina é projectada para fazer esferas de aço de 1 cm de raio. Uma amostra de 10 esferas é produzida e tem o raio médio de $1,004$ cm , com $s = 0,003$ cm. Há razões para suspeitar que a máquina esteja a produzir esferas com raio maior que *l* cm, ao nível de 10%?

Teste de hipóteses para μ de uma população normal com σ^2 desconhecida

Exemplo 11: Uma máquina é projectada para fazer esferas de aço de 1 cm de raio. Uma amostra de 10 esferas é produzida e tem o raio médio de $1,004$ *cm* , com $s = 0,003$ *cm*. Há razões para suspeitar que a máquina esteja a produzir esferas com raio maior que *l* cm, ao nível de 10%?

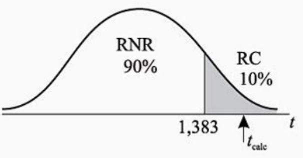
Resolução: Conduzimos um teste unilateral à direita:

$$H_0 : \mu = 1 \qquad t_{n-1,\alpha} = t_{9;10\%} = 1,383$$

$$H_1 : \mu > 1 \qquad s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{0,003}{\sqrt{10}} = 0,0009$$

$$t_{calc} = \frac{1,004 - 1}{0,0009} = 4,44$$

Teste de hipóteses para μ de uma população normal com σ^2 desconhecida



Como $t_{calc} \in RC$, rejeita-se H_0. Portanto, a amostra fornece evidências suficientes para se suspeitar que a máquina esteja a fazer esferas com raio médio maior que 1 cm, ao nível de 10%

Resolução 2 do Exemplo 11:

$$
\begin{aligned}
RNR &\rightarrow P(\bar{x} < \mu_{H_0} + t_{n-1,\alpha} \cdot s_{\bar{x}}) = 1 - \alpha \\
RNR &\rightarrow P(\bar{x} < 1 + 1,383 \cdot 0,0009) = 0,90 \\
RNR &\rightarrow \bar{x} \in (-\infty; 1,001245) \\
RC &\rightarrow \bar{x} \in [1,001245; +\infty)
\end{aligned}
$$

Como $\bar{x} = 1,004 \in RC \rightarrow$, rejeita-se H_0.