Estatística Aplicada à Recursos Hídricos

Docente: Rachid Muleia

rachid.muleia@uem.mz

Mestrado em Gestão de Recursos Hídricos - DGEO/UEM

Tema: Distribuições Teóricas de Probabilidade de v.a.'s discretas

Ano lectivo: 2023

Distribuições de Probabilidade para v.a.'s discretas

- A distribuição teórica de probabilidade (ou modelo probabilístico) serve para descrever o comportamento de uma v.a.;
- No caso das v.a.'s discretas, ela especifica todos os resultados possíveis da v.a. junto com a probabilidade de que cada um ocorra;
- No caso das contínuas, ela permite determinar as probabilidades associadas a intervalos específicos de valores;
- Distribuições de Probabilidade para v.a's discretas mais importantes:
  - ➜ Distribuição de Bernoulli
  - ➜ Distribuição de Binomial
  - ➜ Distribuições Geométrica
  - ➜ Distribuições Pascal ou Binomial Negativa
  - ➜ Distribuições Hipergeométrica
  - ➜ Distribuição Polinomial ou Multinomial
  - ➜ Distribuição de Poisson

Distribuição de Bernoulli

- Consideremos uma única realização de um experimento aleatório, que admite somente dois resultados possíveis:"sucesso" ou "fracasso"

- Um experimento dessa natureza é chamado de "Ensaio de Bernoulli" ou "Prova de Bernoulli".

- Exemplo de uma prova de Bernoulli:

$$\text{Lançamento de moeda} \begin{cases} \text{cara}, & \text{sucesso, com } P(\text{cara}) = p; \\ \text{coroa}, & \text{fracasso, com } P(\text{coroa}) = 1 - p. \end{cases}$$

- Seja X o número de sucessos em uma única realização do experimento. Então

$$X = \begin{cases} 1, & \text{sucesso;} \\ \\ 0, & \text{fracasso.} \end{cases} \quad \text{com} \quad P(X = 1) = p \quad \text{e} \quad P(X = 0) = 1 - p$$

Distribuição de Bernoulli

- Nesses condições, diz-se que a v.a. X tem uma distribuição de Bernoulli com parâmetro p. Simbolicamente

$$X \sim B(1, p)$$

onde "1" indica que o experimento foi realizado uma única vez.

- A função de probabilidade, isto é, fmp, de X é dada por

$$\boxed{P(X = k) = p^k (1 - p)^{1-k}}, \quad k = 0, 1 \quad \text{para } 0 < p < 1.$$

- Definição (Valor Esperado e Variância): Se a v.a. $X \sim B(1, p)$, então

$$E(X) = p; \qquad Var(X) = p(1 - p); \quad \text{e} \quad \sigma_X = \sqrt{p(1 - p)}$$

Distribuição de Bernoulli

- Exemplo 1: Uma urna tem 30 bolas brancas e 20 verdes. Retira-se uma bola dessa urna. Seja X o número de bolas verdes. Determine P(X) e calcule $E(X)$ e $Var(X)$.

Distribuição de Bernoulli

- Exemplo 1: Uma urna tem 30 bolas brancas e 20 verdes. Retira-se uma bola dessa urna. Seja X o número de bolas verdes. Determine P(X) e calcule $E(X)$ e $Var(X)$.

$$X = \begin{cases} 1 & \rightarrow p = \frac{20}{50} = \frac{2}{5} \\ 0, & \rightarrow q = 1 - p = \frac{30}{50} = \frac{3}{5} \end{cases}$$

- Portanto

$$P(X = x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x \left(\frac{3}{5}\right)^{1-x}$$

$$E(X) = p = \frac{2}{5}$$

$$Var(X) = p(1-p) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$$

- Resumo: X tem distribuição de Bernoulli, $X \sim B(1, p)$.

$$X = \begin{cases} 1 & \rightarrow p \\ 0, & \rightarrow 1 - p \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c} P(X = x) = p^x (1-p)^{1-x} \\ E(X) = p \text{ e } Var(X) = p(1-p) \end{array}$$

Distribuição Binomial

- Agora consideremos n realizações <u>independentes</u> de um mesmo experimento aleatório.
- Cada realização admite apenas dois resultados: "sucesso" com probabilidade p e "fracasso" com probabilidade $1 - p$.
- As probabilidades de sucesso e fracasso são as mesmas para cada realização.
- Ou seja, trata-se de n repetições independentes de uma prova de Bernoulli.
- Aqui, a v.a. de interesse X é o número de sucessos (k) em n realizações.
- Nesses condições, diz-se que X tem uma distribuição Binomial com parâmetros n e p. Simbolicamente

$$X \sim Bin(n, p)$$

Distribuição Binomial

- Para determinarmos a função de probabilidades de X, $P(X = k)$, vamos considerar um resultado de n provas de Bernoulli, com k sucessos (sequências de S) e $n - k$ fracassos (sequências de F)

$$R = SSS \dots SFFF \dots F$$

- Como as n provas são independentes então (somente para essa ordem)

$$\begin{aligned} P(R) =& p \cdot p \cdot p \cdot \ldots \cdot p \cdot (1-p) \cdot (1-p) \cdot (1-p) \cdot \ldots \cdot (1-p) \\ =& p^k (1-p)^{n-k} \end{aligned}$$

- Assim, a probabilidade de obter k sucessos, seja qual for a ordem é

$$P(X = k) = C_{n,k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad \text{para todo} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

- Definição (Valor Esperado e Variância): Se a v.a. $X \sim Bin(n, p)$, então

$$E(X) = n \cdot p; \quad Var(X) = n \cdot p \cdot (1-p); \quad \text{e} \quad \sigma_X = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$$

Distribuição Binomial

Exemplo 2: Geralmente, em cerca de 80% das chamadas que um certo técnico em computação recebe para resolver panes nos computadores de clientes ele constata que o problema decorreu da presença de algum vírus. Suponha que, em um determinado dia, esse técnico vai visitar seis desses clientes cujos computadores necessitam de conserto, e admita também que os seis clientes não se comunicam por meio de computador (o que garante a independência da existência de vírus em cada computador). Calcule a probabilidade de que:

i) Pelo menos quatro entre os seis computadores estejam com vírus.

ii) No máximo dois dentre eles estejam com vírus.

iii) Todos os seis estejam com vírus.

Resolução:

Distribuição Binomial

Exemplo 2: Geralmente, em cerca de 80% das chamadas que um certo técnico em computação recebe para resolver panes nos computadores de clientes ele constata que o problema decorreu da presença de algum vírus. Suponha que, em um determinado dia, esse técnico vai visitar seis desses clientes cujos computadores necessitam de conserto, e admita também que os seis clientes não se comunicam por meio de computador (o que garante a independência da existência de vírus em cada computador). Calcule a probabilidade de que:

i) Pelo menos quatro entre os seis computadores estejam com vírus.

ii) No máximo dois dentre eles estejam com vírus.

iii) Todos os seis estejam com vírus.

Resolução: Seja X =número de computadores com vírus entre os 6 a serem consertados. Temos que $n = 6$, $p = 0,8$ e $1 - p = 0,2$. Então $X \sim Bin(6; 0,8)$;

Distribuição Binomial

Exemplos (Cont.):

i) Pelo menos quatro entre os seis computadores estejam com vírus.

$$\begin{aligned} P(X \geq 4) =& P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) \\ =& C_{6,4} 0,8^4 \times 0,2^2 + C_{6,5} 0,8^5 \times 0,2^1 + C_{6,6} 0,8^6 \times 0,2^0 \\ =& 0,90112 \end{aligned}$$

ii) No máximo dois dentre eles estejam com vírus.

$$\begin{aligned} P(X \leq 2) =& P(X = 0) + P(X = 1 + P(X = 2) \\ =& C_{6,0} 0,8^0 \times 0,2^6 + C_{6,1} 0,8 \times 0,2^5 + C_{6,2} 0,8^2 \times 0,2^4 \\ =& 0,01696 \end{aligned}$$

iii) Todos os seis estejam com vírus.

$$P(X = 6) = C_{6,6} 0,8^6 \times 0,2^0 = 0,8^6 = 0,26214.$$

Distribuição Binomial

Exemplo 3: Suponha Se 75% de todas as compras em uma determinada loja sejam feitas com cartão de crédito e X seja a quantidade de compras feitas com cartão de crédito entre 10 compras seleccionadas aleatoriamente. Então X tem distribuição Binomial com $n = 10$, $p = 0,75$ e $1 - p = 0,25$, ou seja, $X \sim Bin(10; 0,75)$. Calcule $E(X), Var(X)$ e σ_X.

Resposta:

Distribuição Binomial

Exemplo 3: Suponha Se 75% de todas as compras em uma determinada loja sejam feitas com cartão de crédito e X seja a quantidade de compras feitas com cartão de crédito entre 10 compras seleccionadas aleatoriamente. Então X tem distribuição Binomial com $n = 10$, $p = 0,75$ e $1 - p = 0,25$, ou seja, $X \sim Bin(10; 0,75)$. Calcule $E(X)$, $Var(X)$ e σ_X.

Resposta:

$$\begin{aligned} E(X) =& np = 10 \times 0,75 = 7,5 \\ Var(X) =& np(1-p) = 10 \times 0,75 \times 0,25 = 1,875; \quad \sigma_X = \sqrt{1,875} \end{aligned}$$

Note que apesar de X só poder assumir valores inteiros, E(X) não precisa ser um inteiro.

- Resumo: Se X tem distribuição Binomial, $X \sim Bin(n, p)$, Então

$$\begin{aligned} P(X = k) =& C_{n,k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad \text{para todo} \quad x = 0, 1, 2, \ldots, n. \\ E(X) =& n \cdot p; \quad \text{e} \quad Var(X) = n \cdot p \cdot (1-p); \end{aligned}$$

Distribuição Geométrica

- Consideremos ainda as n realizações independentes de um mesmo experimento aleatório.
- Cada realização admite apenas dois resultados: "sucesso" com probabilidade p e "fracasso" com probabilidade $1 - p$.
- Agora, a v.a. de interesse X é o número de realizações até que o primeiro sucesso ocorra;
- Claramente, X poderá admitir os valores $1, 2, 3, 4, \ldots$;
- X assumirá o valor inteiro k se e somente se ocorrerem $k - 1$ fracassos antes de ser obtido o primeiro sucesso.
- Nesses condições, diz-se que X tem uma distribuição Geométrica com parâmetro p $(0 < p < 1)$. Simbolicamente,

$$X \sim Geom(p)$$

Distribuição Geométrica

- A função de probabilidade, valor esperado e variância de X são definidos como:

$$\begin{aligned} P(X=k) =& p(1-p)^{k-1}, \quad \text{para} \quad k=1,2,3,\ldots \\ E(X) =& \frac{1}{p}; \quad \text{e} \quad Var(X) = \frac{(1-p)}{p^2}; \end{aligned}$$

- Proposições: Se a e b são dois inteiros, então

$$\begin{aligned} P(a \leq X \leq b) =& (1-p)^{a-1} - (1-p)^b \\ P(X \geq a) =& (1-p)^{a-1} \quad (\text{fazendo } b \to +\infty) \\ P(X \leq b) =& 1-(1-p)^b \quad (\text{com } a=1) \end{aligned}$$

Exemplo 4: O engenheiro responsável pelo Controle da Qualidade de uma linha de produção examina, uma após a outra, as peças fabricadas. Se achar uma defeituosa, ele para a produção para detectar e corrigir as causas do defeito. Se após examinar 10 peças verificar que nenhuma é defeituosa, ele mantém a linha funcionando. Se a probabilidade de se achar uma peça defeituosa em cada exame é 0,05, qual é a probabilidade de:

i) a produção ser interrompida antes que a quinta peça seja examinada?

ii) a produção não precisar ser interrompida?

Resposta.: Seja a v.a. $X =$ o número de peças examinadas até se achar a primeira peça defeituosa. Então X segue uma distribuição geométrica com $p = 0,05$, $X \sim Geom(0,05)$.

Distribuição Geométrica

Exemplo 4 (Cont.)

i) A produção é interrompida antes de a quinta peça ser examinada se e somente se $X \leq 4$.

$$\begin{aligned} P(X \leq 4) =& P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) \\ =& 0,05 + 0,05 \times 0,95 + 0,05 \times (0,95)^2 + 0,05 \times (0,95)^3 \\ =& 0,185 \end{aligned}$$

ii) A produção não é interrompida se $X \geq 11$. Ora, $X \geq 11$ se e somente se todas as 10 primeiras peças seleccionadas são perfeitas. Então

$$P(X \geq 11) = (0,95)^{10} = 0,599.$$

Distribuição Binomial Negativa (ou de Pascal)

- Consideremos a mesma sequência anterior de n realizações independentes de um mesmo experimento aleatório.
- Cada realização admite apenas dois resultados: "sucesso" com probabilidade p e "fracasso" com probabilidade $1 - p$.
- Agora, a v.a. de interesse X é o número de realizações até que o r-ésimo sucesso ocorra;
- Assim, X assumir os valores $r, r+1, r+2, r+3, \ldots$;
- Note que $X = k$ se e somente se nas $k - 1$ primeiras realizações ocorrerem $(r - 1)$ sucessos (e, consequentemente, $(k-1) - (r-1) = k - r$ fracassos) e ocorrer um sucesso na $k - ésima$ (última) realização.
- Há $C_{(k-1),(r-1)}$ maneiras disso ocorrer, e para cada uma delas, a respectiva probabilidade é $p^r(1-p)^{k-r}$.

Distribuição Binomial Negativa (ou de Pascal)

- Nesses condições, diz-se que X tem uma distribuição Binomial Negativa com parâmetros r e p $(0 < p < 1)$. Simbolicamente,

$$X \sim BN(r, p)$$

- A função de probabilidade, valor esperado e variância de X são definidos como:

$$P(X = k) = C_{(k-1),(r-1)} p^r (1-p)^{k-r}, \quad k = r, r+1, r+2, r+3, \ldots$$
$$E(X) = \frac{r}{p}; \quad \text{e} \quad Var(X) = \frac{r(1-p)}{p^2};$$

- Exemplo 5: A probabilidade de que um semáforo de trânsito esteja aberto (verde) numa esquina é $0,20$. Qual a probabilidade de que seja necessário passar pelo local 10 vezes para encontrá-lo aberto pela 4ª vez?

- Resolução: $X =$ número de passagens pela esquina. $r = 4$, $p = 0,2$ e $q = 1 - p = 0,8$. Então

$$P(X = 10) = C_{9,3} \times (0,2)^4 \times (0,8)^6 = 0,035232.$$

Distribuição Hipergeométrica

- Considere uma população com N elementos, dos quais r têm uma determinada característica (a retirada de um desses elementos corresponde "sucesso");
- Retira-se dessa população, sem reposição, uma amostra de tamanho n;
- Aqui, a v.a. de interesse X é o número de sucessos (k elementos com a característica) na amostra;
- O número total de possíveis amostras sem reposição é $C_{N,n}$;
- Os k sucessos na amostra podem ocorrer de $C_{r,k}$ maneiras e os fracassos de $C_{(N-r),(n-k)}$ modos;
- Nesse caso, diz-se que X tem uma distribuição Hipergeométrica com parâmetros n, N e r. Simbolicamente,

$$X \sim Hiper(n, N, r)$$

Distribuição Hipergeométrica

- Se $X \sim Hiper(n, N, r)$ então sua função de probabilidade é:

$$P(X = k) = \frac{C_{r,k} \times C_{(N-r),(n-k)}}{C_{N,n}}, \quad 0 \leq k \leq n \ \text{ e } \ k \leq r$$

- A esperança matemática e variância de X são então definidas como:

$$E(X) = np \ \text{ e } \ Var(X) = np(1-p)\frac{N-n}{N-1}, \ \text{ onde } \ p = \frac{r}{N}$$

- Exemplo 6: Pequenos motores são guardados em caixas de 50 unidades. Um inspector de qualidade examina cada caixa, antes da posterior remessa, testando 5 motores. Se nenhum motor for defeituoso, a caixa é aceite. Se pelo menos um for defeituoso, todos os 50 motores são testados. Há 6 motores defeituosos numa caixa. Qual a probabilidade de que seja necessário examinar todos os motores dessa caixa?

Distribuição Hipergeométrica

- Se $X \sim Hiper(n, N, r)$ então sua função de probabilidade é:

$$P(X=k) = \frac{C_{r,k} \times C_{(N-r),(n-k)}}{C_{N,n}}, \quad 0 \leq k \leq n \ \text{ e } \ k \leq r$$

- A esperança matemática e variância de X são então definidas como:

$$E(X) = np \ \text{ e } \ Var(X) = np(1-p)\frac{N-n}{N-1}, \ \text{ onde } \ p = \frac{r}{N}$$

- Exemplo 6: Pequenos motores são guardados em caixas de 50 unidades. Um inspector de qualidade examina cada caixa, antes da posterior remessa, testando 5 motores. Se nenhum motor for defeituoso, a caixa é aceite. Se pelo menos um for defeituoso, todos os 50 motores são testados. Há 6 motores defeituosos numa caixa. Qual a probabilidade de que seja necessário examinar todos os motores dessa caixa?

- Resolução: Seja X: "o número de motores defeituosos da amostra". $N = 50, r = 6, n = 5$

Distribuição Hipergeométrica

- Resolução (Cont.): Haverá necessidade de examinar todos os motores se $X \geq$ dentre 5 motores testados. Logo

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) =& 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) \\ =& 1 - \frac{C_{6,0} \times C_{44,5}}{C_{50,5}} = 1 - 0,5126 = 0,4874 \end{aligned}$$

- Exemplo 7: Humberto deseja aumentar a capacidade de memória RAM do seu microcomputador. A placa mãe do PC de Humberto permite a instalação de até quatro pentes de memória e actualmente só possui um pente. Ele vai a um posto de revenda de computadores e solicita a compra e instalação de mais três pentes de memória, idênticos ao actual. Na loja há 12 pentes com essa característica. O que Humberto não sabe, e o técnico também não, é que entre os 12 há quatro pentes defeituosos. Se os três pentes novos forem escolhidos ao acaso, qual a probabilidade de que:
  1) o PC atinja a capacidade máxima de memória RAM?
  2) a capacidade de memória do PC realmente aumente?
  3) o PC continue com a capacidade de memória original?

Distribuição Hipergeométrica

Exemplo 7 (Resolução): Seja X : "Número de pentes bons". Parâmetros: $N = 12$, $n = 3$, $r = 8$; Portanto $\#\Omega = C_{12,3} = 220$.

1) O PC atingir a capacidade máxima de memória

$$P(X = 3) = \frac{C_{8,3} \cdot C_{4,0}}{C_{12,3}} = \frac{56}{220} = 0,2545$$

2) a capacidade da memoria realmente aumentar

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) =& P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) \\ =& \frac{C_{8,1} \times C_{4,2} + C_{8,2} \times C_{4,1} + C_{8,3} \times C_{4,0}}{C_{12,3}} \\ =& \frac{48 + 112 + 56}{220} = 0,9818 \end{aligned}$$

3) O PC continuar com a capacidade original

$$P(X = 0) = \frac{C_{8,0} \cdot C_{4,3}}{C_{12,3}} = \frac{4}{220} = 0,01818$$

Distribuição Polinomial ou multinomial

- Considere um experimento aleatório e k eventos, $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k$, que formam uma partição do espaço amostral do experimento.
- Sejam $P(A_i) = p_i,\ i = 1, 2, \ldots, k$ (probabilidade de sucessos).
- Considere n realizações independentes do mesmo experimento, sem que os p_i são constantes durante as repetições, com $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$
- Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_k$ o número de ocorrências (de sucessos) em $A_1, A_2, \ldots, A_k$, respectivamente, com $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} X_i = n$;
- Nessas condições, diz-se que X_i tem distribuição multinomial cuja função de probabilidade é

$$P(X_1 = n_1, X_2 = n_2, \ldots, X_k = n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!} \times p_1^{n_1} \times p_2^{n_2} \times \ldots p_k^{n_k}$$

Com $\displaystyle\sum^{n} n_i = n$;

Distribuição Polinomial ou multinomial

Quando $k = 2$, tem-se a distribuição binomial, pois

$$P(X_1 = n_1, X_2 = n_2) = \frac{n!}{n_1!n_2!} \times p_1^{n_1} \times p_2^{n_2}, \quad \text{com} \quad n_2 = n - n_1; \text{ e } p_2 = 1 - p_1$$

- Exemplo 7: Uma urna tem 6 bolas brancas, 4 pretas e 5 azuis. Retiram-se 8 bolas com reposição. Qual a probabilidade de sair 4 bolas brancas, 2 pretas e 2 azuis?

Distribuição Polinomial ou multinomial

Quando $k = 2$, tem-se a distribuição binomial, pois

$$P(X_1 = n_1, X_2 = n_2) = \frac{n!}{n_1!n_2!} \times p_1^{n_1} \times p_2^{n_2}, \quad \text{com} \quad n_2 = n - n_1; \text{ e } p_2 = 1 - p_1$$

- Exemplo 7: Uma urna tem 6 bolas brancas, 4 pretas e 5 azuis. Retiram-se 8 bolas com reposição. Qual a probabilidade de sair 4 bolas brancas, 2 pretas e 2 azuis?

  Resolução: B: saída de uma bola branca; $P(B) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5} = p_1$;
  P: saída de uma bola preta; $P(P) = \frac{4}{15} = p_2$;
  A: saída de uma bola Azul; $P(A) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} = p_3$.
  Sejam X_1: nº de bolas brancas;
  X_2: nº de bolas pretas; e
  X_3: nº de bolas azuis. Então

$$P(X_1 = 4, X_2 = 2, X_3 = 2) =$$

$$= \frac{8!}{4!2!2!} \left(\frac{2}{5}\right)^4 \left(\frac{4}{15}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

Distribuição de Poisson

- Envolve a contagem de algum evento de interesse em um intervalo de tempo ou espaço.

- Algumas situações nas quais se aplica a distribuição de Poisson
  - Nº de chamadas telefônicas que chegam a uma Central em um dado intervalo de tempo;
  - Nº de defeitos de acabamento em um m^2 de uma chapa metálica;
  - Nº necessário de ambulâncias em um bairro em uma certa noite;
  - Nº de erros tipográficos por página, em um material impresso;

- Suposições básicas:
  - A probabilidade da ocorrência de um sucesso no intervalo é proporcional ao intervalo.
  - A probabilidade de mais de um sucesso nesse intervalo é bastante pequena com relação à probabilidade de um sucesso.
  - Os eventos ocorrem independentemente, no mesmo intervalo ou entre intervalos consecutivos.

Distribuição de Poisson

- Aqui, a v.a. de interesse X é o nº de sucessos no intervalo (tempo ou espaço)
- Definição: Diz-se que a v.a. X tem uma distribuição de Poisson com parâmetro λ ($\lambda > 0$) se sua função de probabilidade é

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, \quad \text{para} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

- Geralmente, O valor de λ é uma taxa média por unidade de tempo ou por unidade de área;
- O símbolo e é uma constante (base dos logaritmos naturais) cujo valor aproximado é $2,71828$;
- Escreve-se $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ para indicar que a v.a. X tem distribuição de Poisson com parâmetro λ
- Esperança matemática e variância de uma v.a. Poisson

$$E(X) = \lambda \quad \text{e} \quad Var(X) = \lambda$$

Distribuição de Poisson

- Exemplo 8: Admita que o número de falhas no recapeamento de um fio condutor de electricidade obedece a uma distribuição de Poisson e que em média há duas falhas por metro. Qual a probabilidade de que:
  1) em um determinado metro de fio o recapeamento apresente três falhas?
  2) em sete metros de fio sejam encontradas no máximo 10 falhas?

Distribuição de Poisson

- Exemplo 8: Admita que o número de falhas no recapeamento de um fio condutor de electricidade obedece a uma distribuição de Poisson e que em média há duas falhas por metro. Qual a probabilidade de que:
  1) em um determinado metro de fio o recapeamento apresente três falhas?
  2) em sete metros de fio sejam encontradas no máximo 10 falhas?

  Resolução:
  1) Seja X: "número de falhas num dado metro de fio". Então $X \sim$ Poisson(2). Assim
  $$P(X = 3) = \frac{e^{-2}2^3}{3!} = 0,1804.$$
  2) Para essa nova situação, tem-se Y: "número de falhas em sete metros de fios". A nova taxa média por unidade é $\lambda = 2 \times 7 = 14$. Então $Y \sim$ Poisson(14). Assim
  $$P(Y \leq 10) = \sum_{k=0}^{10} \frac{e^{-14}14^k}{k!} = 0,1757.$$

Distribuição de Poisson

- Exemplo 9: Numa central telefônica chegam em média 300 telefonemas por hora. Qual a probabilidade de que:
  1) num minuto não haja nenhuma chamada?
  2) em dois minutos haja duas chamadas?
  3) em t minutos não haja chamadas?

Distribuição de Poisson

- Exemplo 9: Numa central telefônica chegam em média 300 telefonemas por hora. Qual a probabilidade de que:
  1) num minuto não haja nenhuma chamada?
  2) em dois minutos haja duas chamadas?
  3) em t minutos não haja chamadas?

  Resolução:
  1) Seja X: "número de chamadas por minuto"; $\lambda = \frac{300}{60} = 5$. Então $X \sim$ Poisson(5). Assim

$$P(X = 0) = \frac{e^{-5}5^0}{0!} = 0,006738.$$

  2) Seja Y: "número de chamadas em dois minutos"; $\lambda = 2 \times 5 = 10$. Então $Y \sim$ Poisson(10). Assim

$$P(X = 2) = \frac{e^{-10}10^2}{2!} = 0,002270.$$

  3) Seja Z: "número de chamadas em t minutos"; $\lambda = 5t$

$$P(Z = 0) = \frac{e^{-5t}(5t)^0}{0!} = e^{-5t}$$

Aproximação da dist. binomial pela dist. de Poisson

Proposição: Suponha que na fmp $Bin(n,p)$, tenhamos $n \to \infty$ e $p \to 0$ de tal forma que np se aproxime de um valor $\lambda > 0$.
Então $Bin(n,p) \to \text{Poisson}(np)$.

- Como regra prática, a aproximação da binomial pela distribuição de Poisson pode ser aplicada se

$$\begin{cases} 1.\ n \to \infty & (\text{n>30}); \\ 2.\ p \to 0 & (\text{p<0,1}) \\ 3.\ 0 < np \leq 10 & . \end{cases}$$

- Nesse caso a distribuição binomial produz probabilidades muito aproximadas das obtidas por meio da distribuição de Poisson com $\lambda = np$.

- Ou seja, se $X \sim Bin(n,p)$, então $P(X=k) = C_{n,k}p^k(1-p)^{n-k}$ é aproximado de $P(X=k) = \frac{e^{-np}(np)^k}{k!}$

Aproximação da dist. binomial pela dist. de Poisson

Exemplo 10: Seja $X \sim Bin(200; 0,01)$. Calcule $P(X = 10)$ usando binomial e aproximação pela Poisson.

Aproximação da dist. binomial pela dist. de Poisson

Exemplo 10: Seja $X \sim Bin(200; 0,01)$. Calcule $P(X = 10)$ usando binomial e aproximação pela Poisson.

Resolução: Binomial

$$P(X = 10) = C_{200,10}(0,01)^{10}(0,99)^{190} = 0,000033$$

Aproximação pela Poisson: $\lambda = np = 200 \times 0,01 = 2$

$$P(X = 10) = \frac{e^{-2} \times 2^{10}}{10!} = 0,000038$$

Observe que a aproximação é bastante boa, com o erro de apenas $0,000005$.